ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI (VNU)
TRUNG TÂM NGHIÊN CỨU CHÂU Á (ARC)

BÁO CÁO TỔNG HỢP NGHIỆM THU
ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC

CÁC ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN CỦA TỔNG NGẪU NHIÊN CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN VÀ ỨNG DỤNG

Chủ nhiệm đề tài:

- **PGS. TS. Trần Lộc Hùng**

Thời gian thực hiện:

- **24 tháng (3/2007-3/2009)**

Huế, Tháng 4 năm 2009

DANH SÁCH THAM GIA THỰC HIỆN ĐỀ TÀI

1. PGS.TS. Trần Lộc Hùng, Trường Đại học Khoa học Huế (Chủ nhiệm đề tài)
2. Ths. Trần Thiện Thành, Khoa Toán, Trường Đại học Khoa học Huế (Thư ký đề tài).
3. Ths. Bùi Quang Vũ, Khoa Toán, Trường Đại học Khoa học Huế.
4. Ths. Đặng Thị Tố Như, Trường Đại học Kinh tế, Đại học Đà Nẵng.

Mục lục

Giải thích các chữ viết tắt

1. $\mathcal{R}$ - tập hợp các số thực
2. $\mathcal{N}$ - tập hợp các số tự nhiên
3. $\mathcal{Z}$ - tập hợp các số nguyên
4. $\mathcal{F}$ - σ đại số
5. $\xrightarrow{P}$ - sự hội tụ theo xác suất
6. $\xrightarrow{d}$ - sự hội tụ theo phân phối
7. $\xrightarrow{w}$ - sự hội tụ yếu
8. $\xrightarrow{a.s.}$ - sự hội tụ hầu chắc chắn

Tóm tắt kết quả đăng ký

1. **Tên đề tài**: Các định lý giới hạn của tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên và ứng dụng

2. **Chủ nhiệm đề tài**: PGS. TS. Trần Lộc Hùng
   - Trường Đại Học Khoa Học Huế
   - 77 Nguyễn Huệ, Thành phố Huế
   - Điện thoại: (054) - 3835949
   - Di động: 0905. 899. 936
   - E-mail: tlhungvn@gmail.com

3. **Cơ quan chủ trì**: Trường Đại học Khoa học Huế

4. **Ngành**: Toán học; **Chuyên ngành**: Lý thuyết xác suất và Thống kê toán học

5. **Lĩnh vực Nghiên cứu**: Khoa học Tự nhiên; **Loại hình nghiên cứu**: Cơ bản

6. **Thời gian thực hiện**: 24 tháng, từ tháng 3 năm 2007 tới tháng 3 năm 2009

7. **Kinh phí**: 50.000.000 đồng (năm mươi triệu đồng)

8. **Các thành viên tham gia đề tài**:

   (a) Ths. Trần Thiện Thành, Khoa Toán, Trường Đại học Khoa học Huế, học viên Cao học Toán khóa 2007-2009.

   (b) Ths. Bùi Quang Vũ, Khoa Toán, Trường Đại học Khoa học Huế, học viên Cao học Toán khóa 2006-2008.

   (c) Ths. Đặng Thị Tố Như, Trường Đại học Kinh tế Đà Nẵng, học viên Cao học Toán khóa 2007-2098.

9. **Tính cấp thiết của đề tài:**

   (a) Lý thuyết các định lý giới hạn đối với tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập là một trong nhiều hướng nghiên cứu quan trọng của Lý thuyết xác suất và Thống kê Toán học, đang là mục tiêu được quan tâm của nhiều nhà toán học không chỉ trong lĩnh vực nghiên cứu lý thuyết mà cả trong các lĩnh vực ứng dụng (xem chi tiết trong các tài liệu [13],[14], [42], [9], [41], [24]-[26]).

(b) Các công cụ nghiên cứu trong Lý thuyết các định lý giới hạn, đặc biệt đánh giá tốc độ hội tụ trong các định lý giới hạn cổ điển, thường được sử dụng như hàm đặc trưng $E(\exp(itX))$ hoặc hàm sinh mô ment $E(\exp(tX))$ không còn thích hợp, đặc biệt trong các trường hợp liên quan tới các véc tơ ngẫu nhiên nhiều chiều (xem chi tiết trong [9], [41], [40], [45] và [46]).

(c) Phương pháp toán tử và phương pháp khoảng cách xác suất là hai trong nhiều phương pháp tiếp cận hiện đại đã và đang được sử dụng trong nghiên cứu Lý thuyết các định lý giới hạn của Lý thuyết xác suất cho các biến ngẫu nhiên độc lập (hoặc không nhất thiết độc lập) (xem [1]-[3], [7], [9], [41], [15] - [19], [51]-[54]). Đặc biệt, phương pháp toán tử và phương pháp khoảng cách xác suất được đánh giá là có nhiều triển vọng ứng dụng trong không gian vô hạn chiều và trong các trường ngẫu nhiên (xem nhận xét về toán tử Trotter của A. B. Molchanov trong [36] và V. Sakalauskas trong và [46]).

(d) Từ các kết quả liên quan tới dáng điệu tiệm cận của tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập, tìm các ứng dụng trong lý thuyết ước lượng (ước lượng điểm và ước lượng khoảng), lý thuyết kiểm định (tham số và phi tham số), mô phỏng Monte Carlo và trong các mô hình thống kê ứng dụng, các mô hình kinh tế, ...

10. **Mục tiêu đề tài**:

(a) Mở rộng các kết quả cổ điển trong Lý thuyết các định lý giới hạn (cụ thể, Định lý giới hạn trung tâm và Luật yếu các số lớn) với tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên (hoặc véc tơ ngẫu nhiên) độc lập, (phát triển và mở rộng hướng của H. Robbins [42], B. Gnhedenko [13],[14], W. Feller [9] và A. Renyi [41]).

(b) Sử dụng khoảng cách xác suất được xây dựng trên cơ sở toán tử Trotter (H. F. Trotter, 1959, xem [49]) để đánh giá tốc độ hội tụ trong một số định lý giới hạn của tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên (hoặc véc tơ ngẫu nhiên) độc lập và đánh giá khoảng cách giữa hai tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên (hoặc véc tơ ngẫu nhiên) độc lập.

(c) Tìm các ứng dụng qua phép tiếp cận tổng ngẫu nhiên như xác định hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên dạng khi bình phương χ^2 với độ tự do là một biến ngẫu nhiên, xây dựng khoảng tin cậy cho các tham số của tổng thể qua các ước tử là tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập.

11. **Nội dung nghiên cứu chính:**

(a) Nghiên cứu dáng điệu tiệm cận cho các tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập khi số các thành phần của tổng là một biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương, độc lập với mọi biến ngẫu nhiên thành phần. Xét các trường hợp khi số thành phần của tổng ngẫu nhiên là một biến ngẫu nhiên có phân phối xác suất cụ thể.

(b) Sử dụng khoảng cách xác suất Trotter đánh giá tốc độ hội tụ trong Luật yếu các số lớn dạng Khintchin trong trường hợp tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập (xem chi tiết trong [20]). Các kết quả nhận được có thể sử dụng trong nghiên cứu Lý thuyết xấp xỉ, đặc biệt có thể áp dụng vào bài toán xấp xỉ Weiertrass đối với một hàm liên tục trên đoạn đóng [0,1] (xem [29]).

(c) Sử dụng khoảng cách xác suất Trotter đánh giá khoảng cách giữa hai tổng ngẫu nhiên các vectơ ngẫu nhiên độc lập (thể hiện trong các bài báo [18]-[23]). Các kết quả nhận được theo hướng này là sự phát triển và mở rộng các kết quả của Prakasa B. L. S. Rao [40] và V. Sakalauskas [45]. Đồng thời cũng là sự mở rộng các kết quả của P. L. Butzer trong [1] và [2], của Z. Rychlick ([43] và [44]), và của Trần Lộc Hùng (xem [15] và [16].

(d) Tìm kiếm một số ứng dụng liên quan tới các bài toán thống kê ứng dụng và mô phỏng Monte Carlo qua phép tiếp cận tổng ngẫu nhiên, cụ thể xác định một thuật toán tính các hàm phân phối dạng khi bình phương χ^2 với độ tự do là một biến ngẫu nhiên, hoặc xây dựng khoảng tin cậy ngẫu nhiên cho giá trị trung bình tổng thể và cho tỷ lệ tổng thể.

12. **Kết quả đạt được của đề tài**:

(a) Kết quả đã công bố:

• 07 báo cáo tại các hội nghị hội thảo,

• 07 bài báo đã đăng trên các tạp chí chuyên ngành trong nước ([18]-[23]),

• 02 bài báo đã đăng trên các tạp chí chuyên ngành ngoài nước

• 01 bài báo đã được đăng ([24]) trên tạp chí ngoài nước.

Cụ thể

i. • 03 báo cáo tại Hội nghị Khoa học Đại học Huế lần thứ 2, 4/2007;

• 02 báo cáo tại Hội thảo Tối ưu và Toán ứng dụng tại Ba Vì các năm 2007, 2008;

• 01 báo cáo tại Hội thảo Việt Nam- Hàn quốc tại Nha Trang năm 2008;

• 01 báo cáo tại Đại hội Toán học toàn quốc lần thứ 7 tại Quy Nhơn (Bình Định), tháng 8 năm 2008.

ii. • 01 kết quả đăng trên Tạp chí Khoa học và Kỹ thuật, Học Viện Kỹ thuật quân sự, năm 2008;

• 03 kết quả đăng trên Tạp chí Khoa Học Đại học Huế các năm 2007, 2008;

- 01 kết quả đăng trên Thông tin Khoa học Trường Đại học Khoa học Huế năm 2008;
- 01 kết quả đăng trên Tạp chí ứng dụng Toán học năm 2008;
- 01 kết quả đăng trên Kỷ yếu Hội thảo Việt Nam - Hàn Quốc năm 2008;
- 01 kết quả đăng trên Proceedings of the International Scientific Conference, Probability Theory, Random Processes, Mathematical Statistics and Applications, Minsk, Belarus, September 15-19, (2008, pp. 417 - 422).

iii. • 01 kết quả đăng trên Bulletin of the Korean Mathematical Society 2008;
• 01 kết quả đăng trên International Mathematical Forum (2009).

iv. 01 kết quả gửi đăng trên Communications of the Korean Mathematical Society, 2008.

(b) Tham gia đào tạo 02 Thạc sỹ chuyên ngành Lý thuyết Xác suất và Thống kê toán học (đã bảo vệ 11/ 2007 và 12/2008 tại Trường Đại học Khoa Học Huế).

(c) Đồng hướng dẫn 01 NCS chuyên ngành Lý thuyết Xác suất và Thống kê Toán học, tại Trường Đại học Tổng hợp Quốc gia Belarus (BSU), đã bảo vệ tháng 5/2009 tại BSU.

13. **Sản phẩm của đề tài**:

(a) Các báo cáo tại Hội nghị, Hội thảo:

i. Trần Lộc Hùng, *Đánh giá khoảng cách xác suất Trotter của hai tổng chuẩn hóa các véc tơ ngẫu nhiên độc lập*, **Hội nghị Khoa học** Đại học Huế lần thứ 2, 2007.

ii. Trần Lộc Hùng và Trần Thiện Thành, *Một số kết quả liên quan tới tâm của biến ngẫu nhiên*, **Hội nghị Khoa học** Đại học Huế lần thứ 2, 2007.

iii. Trần Lộc Hùng, Trần Thiện Thành và Bùi Quang Vũ, *Phân phối khi bình phương với độ tự do ngẫu nhiên*, **Hội nghị Khoa học** Đại học Huế lần thứ 2, 2007.

iv. Trần Lộc Hùng và Trần Thiện Thành, *Phân phối khi bình phương với độ tự do ngẫu nhiên*, **Hội thảo Tối ưu và Toán ứng dụng** (lần thứ 5), Ba Vì, 2007.

v. Trần Lộc Hùng, Trần Thiện Thành và Bùi Quang Vũ, *Về một bài toán ước lượng tham số qua tổng ngẫu nhiên*, **Hội thảo Tối ưu và Toán ứng dụng** (lần thứ 6), Ba Vì, 2008.

vi. Tran Loc Hung, Tran Thien Thanh and Bui Quang Vu, *Some connections between random sum limit theorems and Monte Carrlo Simulation*, **Vietnam-Korea Workshop on Optimization and Applied Mathematics**, Nha Trang, 2008

vii. Tran Loc Hung and Tran Thien Thanh, *Some Estimation Problems via Random-Sum Estimators*, **Đại Hội Toán học toàn quốc**, 2008.

(b) Các kết quả đăng trên các tạp chí trong nước

i. Trần Lộc Hùng và Trần Thiện Thành, *Một số kết quả về tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối*, **Tạp chí Khoa học và Kỹ thuật**, Học Viện Kỹ thuật Quân sự, số 120, III, trang 12-22.

ii. Trần Lộc Hùng, *Các ước lượng của khoảng cách xác suất Trotter của hai tổng các véc tơ ngẫu nhiên độc lập*, **Tạp chí Khoa học**, Đại học Huế, Phần Khoa học Tự nhiên, N. 42, (2007), trang 103-109.

iii. Trần Lộc Hùng, Trần Thiện Thành và Bùi Quang Vũ, *Phân phối của dạng khi bình phương với độ tự do ngẫu nhiên*, **Tạp chí Ứng dụng Toán học Việt Nam**, Vol 5, N. 1, (2007), trang 13-26.

iv. Trần Lộc Hùng và Trần Thiện Thành, *Tốc độ hội tụ trong một số định lý giới hạn đối với tổng ngẫu nhiên qua khoảng cách Trotter*, **Tạp chí Khoa học** Đại học Huế, Đại học Huế, Phần Khoa học Tự nhiên, N. 14 (48), (2008), trang 41-48.

(c) Các kết quả đăng ở Kỷ yếu các Hội nghị, Hội thảo

i. Tran Loc Hung, Tran Thien Thanh and Bui Quang Vu, *Some connections between Random-sum Limit Theorems and Monte Carlo Simulation*, Proceedings of the Sixth Vietnam-Korea Joint Workshop Mathematical Optimization Theory and Applications, February 25-29, 2008, **Publishing House for Science and Technology**, pp. 53-63.

ii. Tran Loc Hung, *On the Trotter's distance of two weighted random sums of d-dimensional random variables*, Probability Theory, Random Processes, Mathematical Statistics and Applications, **Proceedings of the International Scientific Conference**, Minsk, September 15-19, (2008), pp. 417-422.

(d) Các kết quả đăng trên các tạp chí ngoài nước

i. Tran Loc Hung, Tran Thien Thanh and Bui Quang Vu,(2008) "Some results related distribution functions of chi-square type random variables with random degrees of freedom", **Bulletin of Korean Mathematical Society**, 45, No. 3, pp. 509-522, MR2442192.

ii. Tran Loc Hung, (2009), Estimations of the Trotter's distance of two weighted random sums of d-dimensional in dependent random variables, **International Mathematical Forum**, 4, no. 22, pp. 1079 - 1089.

(e) Các kết quả đã gửi đăng

i. Tran Loc Hung and Tran Thien Thanh, (2009), "Some results related random sums of random variables", đã được nhận đăng trên **Communications of the Korean Mathematical Society**.

14. **Địa chỉ có thể ứng dụng**:

    (a) Các kết quả của đề tài có thể sử dụng làm tài liệu tham khảo cho các giáo trình và bài giảng trong đào tạo cử nhân, thạc sỹ và tiến sỹ chuyên ngành Lý thuyết Xác suất và Thống kê toán học của Khoa Toán, Trường Đại học Khoa học, Đại học Huế.

    (b) Các kết quả của đề tài đã được báo cáo tại:

    i. Seminar của Bộ môn Xác suất Thống kê, Khoa Toán, Trường Đại học Khoa học, Đại học Huế (tháng 12/2007 và tháng 11/2008).
    ii. Seminar của Bộ môn Xác suất Thống kê, Khoa Toán-Cơ-Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, (tháng 5/2008).
    iii. Seminar của Bộ môn Xác suất Thống kê, Khoa Toán ứng dụng, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, (tháng 12 năm 2007).
    iv. Seminar thuộc Dự án Nghiên cứu Toán Ứng dụng 2008-2010, Khoa Toán Trường Đại học Khon Kaen, Thái Lan (tháng 7/2007, 7/2008 và 3/2009).
    v. Seminar của Bộ môn Xác suất Thống kê, Khoa Toán, Trường Đại học Chulalonkorn, Băng Kok, Thái lan (7/2008).

15. **Kinh phí thự hiện đề tài:** 50.000.000 đ (năm mươi triệu đồng)..

16. **Cấu trúc của Báo cáo tổng kết**:

    (a) Chương 1. Tổng quan những vấn đề nghiên cứu
    (b) Chương 2. Dáng điệu tiệm cận của tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập.
    (c) Chương 3. Đánh giá tốc độ hội tụ của trong các định lý giới hạn và khoảng cách giữa hai tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập qua khoảng cách Trotter
    (d) Chương 4. Một số ứng dụng trong thống kê và trong Mô phỏng Monte Carlo.
    (e) Kết luận và Kiến nghị
    (f) Tài liệu tham khảo
    (g) Phụ lục

Chương 1

Tổng quan những vấn đề nghiên cứu

1.1 Các định lý giới hạn cổ điển

Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, có cùng phân phối, xác định trên không gian xác suất $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, với kỳ vọng $\mu = E(X_n)$ và phương sai $0 < \sigma^2 = D(X_n) < +\infty, n \geq 1$. Trong suốt báo cáo này, chúng tôi sử dụng các ký hiệu $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, X^* \in \mathcal{N}(0,1)$ và X^a là biến ngẫu nhiên suy thoái tại điểm a, $a \in \mathbb{R}$, tức là

$$P(X^* < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{1}{2}y^2)dy, \tag{1.1.1}$$

và

$$P(X^a \neq a) = 0, \quad P(X^a = a) = 1. \tag{1.1.2}$$

Ngoài ra, ký hiệu $\xrightarrow{P}$ chỉ sự hội tụ theo xác suất và ký hiệu $\xrightarrow{w}$ chỉ sự hội tụ yếu của dãy các biến ngẫu nhiên.

Như đã biết, Định lý giới hạn trung tâm cổ điển khẳng định (xem chi tiết trong các tài liệu [9], [41] và [36])

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}} \xrightarrow{w} X^*, \quad \text{khi} \quad n \to \infty, \tag{1.1.3}$$

hay

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{w} X^*, \quad \text{khi} \quad n \to \infty. \tag{1.1.4}$$

Chú ý rằng, trường hợp các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ không nhất thiết cùng phân phối, với điều kiện Lindeberg (xem chi tiết trong các tài liệu [9], [41] và [1])

$$\forall \epsilon > 0, \quad \frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^{n} \int_{|x| \geq \epsilon B_n} |\, x - \mu_j \,|^2 dF_{X_j}(x) \to 0, \quad \text{khi} \quad n \to \infty \tag{1.1.5}$$

kết quả trong (1.1.3) vẫn còn đúng, ở đây $\mu_j = E(X_j), \sigma_j^2 = D(X_j), B_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2$, với mọi $j = 1, 2, \ldots$.

Bên cạnh đó, Luật yếu các số lớn cổ điển khẳng định (xem Định lý Khintchin trong [9],[41] và [36])

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0, \quad \text{khi} \quad n \to \infty, \tag{1.1.6}$$

hay

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu, \quad \text{khi} \quad n \to \infty. \tag{1.1.7}$$

Định lý giới hạn trung tâm ((1.1.3) hay (1.1.4)) và Luật yếu các số lớn ((1.1.6) hay (1.1.7)), được coi là hai viên ngọc quý của Lý thuyết xác suất, là cơ sở cho hầu hết các vấn đề quan trọng của Thống kê toán học như ước lượng điểm, ước lượng khoảng và các kết luận thống kê (xem chi tiết trong [9] và [41]). Đặc biệt, gần đây nhiều kết quả liên quan tới bài toán xấp xỉ Weierstrass (xem [29] và [47]) và mô phỏng Monte Carlo (xem [27]) đã được thiết lập dựa trên các cơ sở của Luật yếu các số lớn và Định lý giới hạn trung tâm của dãy các biến ngẫu nhiên độc lập $\{X_n, n \geq 1\}$.

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là khi thay chỉ số tất định n trong tổng

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

bằng các biến ngẫu nhiên $N_n, n \geq 1$ nhận giá trị nguyên, dương với phân phối xác suất xác định thì các kết quả cổ điển sẽ thay đổi thế nào?

Chú ý rằng, chỉ số tất định n có thể xem như một biến ngẫu nhiên N_n có phân phối suy thoái tại điểm n, tức là $P(N_n = n) = 1$. Do đó , thực chất các bài toán liên quan đến tổng ngẫu nhiên

$$S_{N_n} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N_n}$$

các biến ngẫu nhiên độc lập có thể xem như là sự mở rộng và phát triển tự nhiên của tổng tất định S_n. Trong thực tế, có rất nhiều vấn đề được mô tả bởi tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập (xem các tài liệu [13], [14], [9], [41], [24]-[27]). Từ khi xuất hiện bài báo của H. Robbins vào năm 1948 (xem [42]), nhiều kết quả liên quan tới dáng điệu tiệm cận của tổng ngẫu nhiên S_{N_n} được đề cập tới. Lưu ý là trong tất cả các phần của Báo cáo, chúng tôi luôn giả thiết rằng $\{N_n, n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương, độc lập với mọi $X_n, n \geq 1$. Chú ý rằng, các điều kiện liên quan tới các biến ngẫu nhiên $N_n, n \geq 1$ được sử dụng nhiều trong các nghiên cứu của H. Robbins, W. Feller, A. B. Gnhedenko và A. Renyi (xem các tài liệu [42], [9], [13], [14] và [41]) như

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{P} 1, \quad khi \quad n \to \infty, \tag{1.1.8}$$

$$N_n \xrightarrow{P} \infty, \quad khi \quad n \to \infty \tag{1.1.9}$$

và

$$E(N_n) \to +\infty, \quad khi \quad n \to \infty. \tag{1.1.10}$$

Dễ thấy, các điều kiện (1.1.8), (1.1.9) và (1.1.10) không tương đương. Thực chất, chúng tuân theo các quan hệ sau:

$$(1.1.8) \Rightarrow (1.1.9) \Rightarrow (1.1.10).$$

Từ sau kết quả của H. Robbins được công bố vào năm 1948 (xem [42]), các vấn đề thường được quan tâm nghiên cứu là:

1. Nếu dãy các biến ngẫu nhiên $\{N_n, n \geq 1\}$ thỏa mãn một trong ba điều kiện trên, thì các kết quả trong các định lý giới hạn cổ điển có còn đúng với tổng ngẫu nhiên S_{N_n} các biến ngẫu nhiên độc lập không?

2. Xác định các điều kiện áp đặt cho các biến ngẫu nhiên $X_n, n \geq 1$ và $N_n, n \geq 1$ để đảm bảo sự hội tụ của tổng S_{N_n} về biến ngẫu nhiên X^* (dạng Định lý giới hạn trung tâm) hay biến ngẫu nhiên X^a (dạng Luật yếu các số lớn), khi $n \to \infty$.

3. Đánh giá tốc độ hội tụ trong các định lý giới hạn (Định lý giới hạn trung tâm và Luật yếu các số lớn) đối với tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập.

4. Tìm các ứng dụng trong các lĩnh vực của khoa học và công nghệ dựa trên cơ sở các định lý giới hạn cho tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập.

Một phần của những câu hỏi trên đã được xét tới trong các công bố của đề tài trong [24]-[27]. Các kết quả nhận được khẳng định rằng với những điều kiện thích hợp áp đặt lên biến ngẫu nhiên $N_n, n \geq 1$, các kết quả của Định lý giới hạn trung tâm và Luật yếu các số lớn vẫn còn đúng. Vì vậy, trên cơ sở của các định lý giới hạn đối với tổng ngẫu nhiên của các biến ngẫu nhiên độc lập, một loạt các vấn đề liên quan tới ước lượng điểm, ước lượng khoảng, mô phỏng Monte Carlo và phân phối χ^2 với độ tự do ngẫu nhiên đã được giải quyết (xem các kết quả của Trần Lộc Hùng và cộng sự trong [24]-[26]). Đặc biệt, một phương pháp tiếp cận mới trong nghiên cứu các định lý giới hạn của tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập được xét tới, cụ thể trong các nghiên cứu có sử dụng phương pháp khoảng cách xác suất được xây dựng trên cơ sở toán tử đặc trưng Trotter (chúng tôi tạm gọi là khoảng cách Trotter). Một số đánh giá khoảng cách giữa hai tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập hoặc tổng ngẫu nhiên các véc tơ ngẫu nhiên độc lập đã được xét tới trong [15]-[23] trên cơ sở khoảng cách Trotter.

1.2 Tốc độ hội tụ trong các định lý giới hạn

Như đã biết, một trong những hướng nghiên cứu chính trong Lý thuyết các định lý giới hạn của Lý thuyết xác suất là đánh giá tốc độ hội tụ trong Định lý giới hạn trung tâm và Luật yếu số lớn cho tổng các biến ngẫu nhiên độc lập. Trước hết phải kể tới kết quả của Berry và Esseen năm 1940 trong đánh giá tốc độ hội tụ trong (1.1.4) (xem [9] và [1]) sau

Định lý 1.2.1. *(Định lý Berry-Esseen) Giả sử* $\{X_n, n \geq 1\}$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối với kỳ vọng 0 và phương sai* $0 < \sigma^2 < \infty$. *Nếu* $\beta_3 = E|\ X\ |^3 < \infty$, *thì*

$$\| F_{\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}} - F_{X^*} \| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\ P\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) - P(X^* < x)\ | \leq \frac{C\beta_3}{\sigma\sqrt{n}}, \tag{1.2.11}$$

ở đây, C là hằng số dương, $\| F_{\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}} - F_{X^*} \|$ *là khoảng cách xác suất Kolmogorov của hai biến ngẫu nhiên* $\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$ *và* X^* *(xem [9], [41]).*

Chú ý rằng, tốc độ hội tụ trong các định lý giới hạn trung tâm cũng có thể được thiết lập qua hàm mật độ xác suất.

Định lý 1.2.2. *Giả sử* $\{X_n, n \geq 1\}$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, có kỳ vọng 0. Ký hiệu* $\sigma_j^2 = E(X_j^2), \quad j = 1, 2, \ldots, \quad B_n = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2$. *Giả sử*

$$B_n \to +\infty, \quad khi \quad n \to \infty$$

và

$$\sum_{j=1}^n E|X_j|^3 = 0\Big(B_n\Big).$$

Khi đó, đánh giá sau được thiết lập

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |p_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}| = 0\left(B_n^{-\frac{1}{2}}\right),$$

ở đây, $p_n(x)$ *là hàm mật độ xác suất của* $\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}$, *còn* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ *là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên* X^*.

Bên cạnh đó, tốc độ hội tụ dạng (1.1.7) trong Luật yếu các số lớn dạng Khintchin được đánh giá bởi kết quả kinh điển của V.V. Petrov năm 1975 (xem [39]) sau

Định lý 1.2.3. *(Định lý V. V. Petrov) Giả sử* $\{X_n, n \geq 1\}$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối với kỳ vọng 0. Giả sử, với* $r \geq 1, \mu_r = E|\ X\ |^r < \infty$. *Khi đó, với* $x \in \mathbb{R}^+$,

$$P\left(\ |\ \frac{S_n}{n}\ | > x\right) = o\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right), \quad khi \quad n \to \infty. \tag{1.2.12}$$

Việc nghiên cứu tốc độ hội tụ dạng (1.2.11) và (1.2.12) được bắt đầu bởi A. Liapunov, H. Cramer, Berry và Esseen những năm đầu thế kỷ hai mươi, và gần đây với những kết quả đáng ghi nhận của V. V. Petrov, V. M. Zolotarev, W. Feller, A. Renyi... (xem chi tiết trong các tài liệu [1], [9], [13], [39] và [41]).

Để nghiên cứu việc đánh giá tốc độ hội tụ trong các định lý giới hạn, chúng ta cần tới một số định nghĩa cùng các tính chất liên quan tới mô đun liên tục và điều kiện Lipschitz (xem chi tiết các chứng minh trong [1], [2] và [3]). Trong suốt báo cáo này, ký hiệu $C_B(\mathbb{R})$ là lớp các hàm liên tục đều, bị chặn trên $\mathbb{R}$, với mọi hàm $f \in C_B(\mathbb{R})$ ta có chuẩn $\| f \| = \sup_{x\in\mathbb{R}} | f(x) |$.

1. Giả sử $f \in C_B(\mathbb{R})$ và $\delta > 0$, mô đun liên tục của hàm f, ký hiệu $\omega(f, \delta)$, xác định bởi
$$\omega(f, \delta) = \sup_{|h|\leq\delta} \| f(x + h) - f(x) \| .$$
2. $\omega(f, \delta)$ là một hàm đơn điệu giảm theo δ với $\omega(f, \delta) \to 0$ khi $\delta \to 0^+$, và
$$\omega(f, \lambda\delta) \leq (1 + \lambda)\omega(f, \delta), \quad \text{với mọi} \quad \delta > 0, \lambda > 0.$$
3. $f \in C_B(\mathbb{R})$ được gọi là thỏa mãn điều kiện Lipschitz bậc $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, ký hiệu $f \in Lip(\alpha)$, nếu $\omega(f, \delta) = 0(\delta^\alpha)$. Chú ý, nếu $f' \in C_B(\mathbb{R})$, thì $f \in Lip(1)$.

Để đánh giá tốc độ hội tụ trong các định lý giới hạn, hai dạng hội tụ là "0-lớn" và "o-nhỏ" thường được sử dụng. Chẳng hạn, I. A. Ibragimov (xem chi tiết trong [1]) đã chỉ ra rằng với các điều kiện mô men tuyệt đối cấp r hữu hạn
$$\beta_r := E(| X |^r) < +\infty, \tag{1.2.13}$$
và điều kiện của H. Bergstrom (xem [1])
$$\mu(j) := \int_{\mathbb{R}} x^j d[F_X(x) - F_{X^*}] = 0, \quad 0 \leq j \leq r \tag{1.2.14}$$
thì, với mỗi $r \geq 4$, khi $n \to \infty$.
$$\| F_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} - F_{X^*} \| = 0\left(n^{-\frac{(r-2)}{2}}\right) \tag{1.2.15}$$
Đối với đánh giá xấp xỉ dạng "o-nhỏ", một kết quả của Esseen cho thấy (xem [1]) khi điều kiện (1.2.13) với $r \geq 2$ và (1.2.14) với $1 \leq j \leq r$ được thỏa mãn,
$$\| F_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} - F_{X^*} \| = o\left(n^{-\frac{(r-2)}{2}}\right) \tag{1.2.16}$$

1.3 Toán tử Trotter

Để thay thế cho hàm đặc trưng trong chứng minh định lý giới hạn trung tâm đối với một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối, năm 1959 H.F. Trotter ([49]) lần đầu tiên đã sử dụng một toán tử liên tục, liên kết với biến ngẫu nhiên X, xác định bởi

$$T_X f(y) := Ef(X+y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y)dF_X(x), \tag{1.3.17}$$

ở đây, $f \in C_B^r(\mathbb{R}) = \{f \mid f^{(j)} \in C_B(\mathbb{R}), j = 1, 2, \dots r, r \in \mathbb{N}\}$.

Các tính chất dưới đây của toán tử Trotter T_X được chứng minh chi tiết trong các tài liệu [49], [1], [2], [41], [36], [15] và [16].

1. $T_X : C_B^r(\mathbb{R}) \to C_B^r(\mathbb{R}), \quad r \in \mathbb{N}$.
2. $\| T_X \| \leq 1$.
3. Nếu X, Y là 2 biến ngẫu nhiên độc lập, thì
$$T_{X+Y}(f) = T_X(T_Y)(f) = T_Y(T_X)(f), \quad f \in C_B^r(\mathbb{R}).$$
4. Nếu $T_X f(x) \equiv T_Y f(x)$ với mọi hàm $f \in C_B^r(\mathbb{R})$, thì $F_X \equiv F_Y$.
5. Nếu $T_{X_n} f(x) \to T_X f(x)$, khi $n \to \infty$, với mọi $f \in C_B^r(\mathbb{R})$, thì $X_n \xrightarrow{w} X$, khi $n \to \infty$..
6. Giả sử $X_1, X_2, \dots X_n, \dots Y_1, Y_2, \dots Y_n, \dots$ là các biến ngẫu nhiên độc lập (theo mỗi nhóm). Khi đó
$$\| T_{\sum_{k=1}^n X_k} - T_{\sum_{k=1}^n Y_k} \| \leq \sum_{k=1}^n \| T_{X_k} - T_{Y_k} \| .$$
7. Giả sử $X_1, X_2, \dots X_n, \dots Y_1, Y_2, \dots Y_n, \dots$ là các biến ngẫu nhiên độc lập (theo mỗi nhóm). Giả sử $\{N_n, n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương, độc lập với mọi X_n và Y_n. Khi đó,
$$\| T_{\sum_{k=1}^{N_n} X_k} - T_{\sum_{k=1}^{N_n} Y_k} \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(N_n = n) \sum_{k=1}^n \| T_{X_k} - T_{Y_k} \| .$$

Dễ dàng nhận thấy toán tử Trotter T_X có nhiều tính chất tương tự hàm đặc trưng $\varphi_X(t)$, cũng vì lý do đó mà toán tử Trotter còn được gọi là toán tử đặc trưng (xem chi tiết trong [36] và [41]).

Sử dụng phương pháp toán tử Trotter, nhiều kết quả liên quan tới dáng điệu tiệm cận cho tổng các biến ngẫu nhiên độc lập cùng các đánh giá tốc độ hội tụ trong các định lý giới hạn đã được thiết lập. Nhóm nghiên cứu của P. L. Butzer từ Cộng hòa Liên bang Đức (xem các tài liệu [1], [2] và [30]) đã xây dựng và đánh giá tốc độ hội tụ trong định lý giới hạn trung tâm tổng quát, mà phân phối giới hạn là phân phối của biến ngẫu nhiên $\varphi-$ phân tích được Z,

$$\varphi(n)S_n \xrightarrow{w} Z, \quad n \to \infty, \tag{1.3.18}$$

ở đây, $\varphi(n) \to 0$ khi $n \to \infty$, và Z là biến ngẫu nhiên $\varphi-$ phân tích được, tức là $Z = \varphi(n)\sum_{j=1}^{n} Z_j$, với $Z_j, j = 1, 2, \ldots n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối (xem định nghĩa biến ngẫu nhiên $\varphi-$ phân tích được trong các tài liệu [3] và [30]).

Lưu ý rằng trong 1.3.18, nếu $\varphi(n) = n^{-\frac{1}{2}}$ và $Z_j \sim N(0,1), j = 1, 2, \ldots n$, thì chúng ta có kết quả cổ điển của Định lý giới hạn trung tâm. Trường hợp $\varphi(n) = n^{-1}$ và Z_j có phân phối suy thoái tại 0, với mọi $j = 1, 2, \ldots, n$, thì ta có Luật yếu các số lớn dạng Khintchin (xem các kết quả của [1], [2], [30], [43], [17]).

Để khẳng định tính ưu việt của phương pháp toán tử Trotter, W. Feller trong cuốn sách nổi tiếng của mình viết năm 1967 (Chương VIII, tài liệu [9]) đã nhấn mạnh là mọi kết quả của ông liên quan tới toán tử tích chập được xây dựng từ ý tưởng của H. F. Trotter (công bố năm 1959, [49]). Giả sử $F_X(x)$ là hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X. Khi đó, với mọi hàm $f \in C_B(\mathbb{R})$, toán tử tích chập Feller được xác định bởi

$$\mathfrak{F}_X(y) := (F_X * f)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)dF_X(x) \tag{1.3.19}$$

đã được sử dụng để chứng minh một số định lý giới hạn trung tâm cho tổng (và tổng ngẫu nhiên) các biến ngẫu nhiên (và véc tơ ngẫu nhiên 2 chiều). Phương pháp này đã được W. Feller sử dụng trong hầu hết các chương của cuốn sách "An introduction to Probability Theory and its Applications" xuất bản năm 1967. Đặc biệt W. Feller đã xây dựng nửa nhóm các toán tử dạng tích chập và ứng dụng có hiệu quả trong nghiên cứu nhiều lĩnh vực khác nhau của Lý thuyết xác suất. Tuy nhiên, toán tử tích chập của Feller không được sử dụng trong đánh giá tốc độ hội tụ trong các định lý giới hạn. Đây có lẽ là một hạn chế của Toán tử tích chập Feller (xem chi tiết trong [9]). Mặt khác, trong cuốn sách "Probability" xuất bản năm 1970, A. Renyi đã dành hẳn một chương để trình bày việc chứng minh định lý giới hạn trung tâm bằng phương pháp toán tử, mà toán tử do A. Renyi sử dụng là chính toán tử dạng Trotter (trong [41], toán tử được xét có tên là toán tử đặc trưng. Tuy nhiên, không rõ vì lý do gì mà A. Renyi không hề nhắc tới toán tử Trotter được công bố năm 1959). Đặc biệt, A. Renyi đã sử dụng phương pháp của Trotter để chứng minh định lý xấp xỉ Poisson (xem chi tiết chương VIII, [41]). Đây có lẽ là trường hợp duy nhất khi toán tử dạng Trotter được sử dụng trong trường hợp các biến ngẫu nhiên rời rạc (Điều này cho phép chúng ta nghĩ tới việc sử dụng ý tưởng của H. F. Trotter và A. Renyi trong nghiên cứu các định lý giới hạn cho các biến ngẫu nhiên độc lập, rời rạc).

Cũng cần thiết phải nhắc tới Z. Rychlik và D. Szynal là hai tác giả người Ba lan đã có nhiều kết quả đáng chú ý khi sử dụng phương pháp toán tử Trotter trong nghiên cứu các định lý giới hạn cho tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập (xem chi tiết trong các tài liệu [43] và [44]).

Bên cạnh đó phải kể tới các kết quả của A. B. Molchanov công bố năm 1975 trong bản dịch tiếng Nga cuốn sách "Xác suất" của Lamperty, sử dụng phương pháp toán tử Trotter đánh giá tốc độ hội tụ trong định lý giới hạn trung tâm cho độ lệch lớn (xem [36]; các kết quả của M. V. Muchanov năm 1989 trong định lý giới hạn trung tâm cho tổng Abel các biến ngẫu nhiên độc lập (xem [37]), của Trần Lộc Hùng những năm 1983 và 1988 trong nghiên cứu Luật yếu các số lớn (xem [15] và [16]; của N. N. Trush và Trần Lộc Hùng trong nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của các thống kê phụ thuộc chỉ số ngẫu nhiên (xem [50], 1993).

Năm 1977 hai kết quả ứng dụng phương pháp toán tử Trotter trong đánh giá tốc độ hội tụ trong định lý giới hạn trung tâm đối với trường hợp véc tơ ngẫu nhiên d chiều ($d \geq 1$) được công bố bởi Prakasa B. L. S. Rao và V. Sakalauskas trong các tài liệu [40] và [45].

Tuy nhiên, các kết quả tương tự cho tổng ngẫu nhiên các véc tơ ngẫu nhiên độc lập và sự tổng quát trường hợp của P. L. Butzer cho véc tơ ngẫu nhiên $\varphi-$ phân tích được chưa được quan tâm tới. Lưu ý rằng, năm 2006 trong [46] V. Sakalauskas nhận xét về công dụng hữu hiệu của phương pháp toán tử Trotter trong các không gian vô hạn chiều. Đó cũng là lý do để đề tài này xét tới việc sử dụng phương pháp khoảng cách xác suất trong đánh giá liên quan tới tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên d-chiều ($d \geq 1$) độc lập (xem các kết quả của tác giả trong các tài liệu [19] và [20]). Phương pháp của Trotter trong nghiên cứu Lý thuyết trường ngẫu nhiên cũng đáng được lưu ý trong những tương lai.

Chương 2

Dáng điệu tiệm cận của tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập

2.1 Đặt vấn đề

Trong lý thuyết xác suất, đã có nhiều kết quả kinh điển về các đặc trưng, phân phối xác suất và dáng điệu tiệm cận của tổng chuẩn hoá $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối (xem chi tiết trong các tài liệu [9], [41]). Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là khi thay chỉ số tất định n trong tổng S_n trên bằng một biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên, dương N có phân phối xác suất xác định, thì các kết quả cổ điển đã có sẽ thay đổi như thế nào? Một ví dụ từ [33] cho thấy tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên có phân phối N(0,1) chưa chắc đã có phân phối N(0,1).

Trong suốt nhiều thập kỷ qua, kể từ khi xuất hiện bài báo của H. Robbins năm 1948 (xem [42]) một hướng nghiên cứu mới đã thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học, và nhiều kết quả sâu sắc liên quan tới các định lý giới hạn của tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập đã được thiết lập (xem [9], [13], [14], [33], [41] và [32]).

Gần đây, phương pháp tiếp cận tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập đã được sử dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của khoa học và công nghệ như vật lý thống kê, thống kê ứng dụng, lý thuyết hàng đợi, lý thuyết mạng, thuật toán Quick Sort, di động ngẫu nhiên, đồ thị ngẫu nhiên...(xem các tài liệu [9], [13], [14], [33], [41] [32] và [48]).

Mục đích chính của chương này là thiết lập các kết quả mới liên quan tới tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối. Các đặc trưng, phân phối xác suất và dáng điệu tiệm cận của tổng ngẫu nhiên đã được xác định trong một số trường hợp cụ thể. Những kết quả nhận được của chúng tôi trong bài này là sự phát triển tiếp tục kết quả của H. Robbins (1948) và của nhiều tác giả đã công bố cho tổng với chỉ số ngẫu nhiên có các phân phối xác suất xác định.

2.2 Tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập

Giả sử $X_1, X_2, \ldots$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối với biến ngẫu nhiên X. Giả sử N là một biến ngẫu nhiên rời rạc, nhận giá trị nguyên, không âm và độc lập với các biến ngẫu nhiên $\{X_i, i \geq 1\}$. Tổng ngẫu nhiên của các biến ngẫu nhiên X_i với chỉ số ngẫu nhiên N được định nghĩa

$$S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N, \quad S_0 = 0$$

Trong các tài liệu [9] và [13], [14]có thể xác định các đặc trưng cơ bản của tổng ngẫu nhiên S_N như sau

Định lý 2.2.1. *Giả sử đối với các b.n.n. X và N, kỳ vọng và phương sai đều tồn tại hữu hạn. Khi đó,*

i. $E(S_N) = E(N).E(X)$,

ii. $D(S_N) = E(N).D(X) + [E(X)]^2.D(N)$.

Định lý 2.2.2. *Giả sử $g(t) = E(t^N)$ là hàm sinh của biến ngẫu nhiên N và biến ngẫu nhiên X có hàm sinh $f(t) = E(t^X)$ cùng hàm đặc trưng $\varphi(t) = E(e^{itX})$. Khi đó*

i. S_N có hàm sinh $h(t)$ xác định bởi $h(t) = g \circ f(t)$,

ii. S_N có hàm đặc trưng $\psi(t)$ xác định bởi $\psi(t) = g \circ \varphi(t)$.

Từ hai định lý trên ta thấy các đặc trưng của tổng ngẫu nhiên hoàn toàn được xác định nếu ta biết các đặc trưng tương ứng của các biến ngẫu nhiên thành phần X và N. Các kết quả chính trong bài báo này được thiết lập dựa trên kết quả của phần (ii) định lý 2.2.

Định lý 2.2.3. *Giả sử $X \sim Bernoulli(p), p \in (0,1)$. Khi đó*

i. Nếu $N \sim Poisson(\lambda), \lambda > 0$, thì $S_N \sim Poisson(\lambda p)$.

ii. Nếu $N \sim T(q), q \in (0,1)$ với $P(N = k) = q(1-q)^k, k = 0, 1, \ldots$ thì $S_N \sim T\big(\frac{q}{p+q-pq}\big)$.

iii. Nếu $N \sim Binomial(n, q), q \in (0,1)$ thì $S_N \sim Binomial(n, pq)$.

Như ta đã biết, tổng các biến ngẫu nhiên (với số thành phần cố định) có phân phối Bernoulli là một biến ngẫu nhiên có phân phối nhị thức. Tuy nhiên, trong trường hợp ngẫu nhiên hóa thì tổng ngẫu nhiên của các biến ngẫu nhiên có phân phối Bernoulli sẽ có phân phối xác suất phụ thuộc vào phân phối của chỉ số ngẫu nhiên N. Định lý trên là một kết quả khá thú vị khi tổng ngẫu nhiên có phân phối cùng với phân phối của chỉ số ngẫu nhiên. Ta có thể dùng định lý 2.2.3(i) để chứng minh định lý xấp xỉ Poisson.

Định lý 2.2.4. *(Định lý xấp xỉ Poisson). Giả sử (X_i) là dãy Bernoulli độc lập với tham số $p_n \in (0,1)$ và $p_n \to 0, np_n \to \lambda(\lambda > 0)$ khi $n \to \infty$. Khi đó, với $n \to \infty$,*

$$S_n \xrightarrow{d} Poisson(\lambda).$$

Định lý 2.2.5. *Giả sử $N \sim Geometry(p)$. Khi đó*

i. Nếu $X \sim Exp(\lambda)$, thì $S_N \sim Exp(\lambda p)$,

ii. Nếu $X \sim Geometry(q)$, thì $S_N \sim Geometry(pq)$.

Chú ý rằng, trong trường hợp trên thì tổng ngẫu nhiên có phân phối cùng với phân phối của biến ngẫu nhiên X.

Định lý 2.2.6. *Nếu $X \sim Poisson(\lambda)$ và $N \sim Poisson(\mu)$, thì S_N có phân phối cho bởi*

$$P(S_N = n) = \frac{\lambda^n e^{-\mu}}{n!}\ \varphi_n(\mu e^{-\lambda}),$$

trong đó hàm $\varphi_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k k^n}{k!}$ thỏa mãn công thức truy hồi

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = e^x - 1 \\ \varphi_n(x) = x\big[1 + \sum\limits_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i \varphi_i(x)\big] \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

Định lý 2.2.7. *Nếu $X \sim \chi^2(1), N \sim Geometry(p)$, thì S_N có hàm mật độ xác định bởi*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leq 0, \\ pqe^{-x(1-q^2)/2}\ \Phi(q\sqrt{x}) + \frac{pe^{-x/2}}{\sqrt{2\pi x}} & \text{nếu } x > 0, \end{cases}$$

trong đó $q = 1 - p, \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$.

Các kết quả cổ điển cho thấy phân phối của tổng các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn là chuẩn. Tuy nhiên, dễ dàng thấy điều này không còn đúng trong trường hợp tổng với chỉ số ngẫu nhiên.

Định lý 2.2.8. *(Định lý Robbins, 1948) Giả sử $X_1, X_2, ...$ là một dãy b.n.n. độc lập, cùng phân phối với $0 < D(X_i) < \infty$. Ngoài ra, giả sử rằng (N_n) là dãy b.n.n nhận giá trị nguyên dương, độc lập với X_i với mỗi n. Khi đó, với $n \to \infty$, nếu các điều kiện sau thỏa mãn*

$$E(N_n) \to \infty, \tag{2.2.1}$$

và

$$\frac{D(N_n)}{E(N_n)} \to 0, \tag{2.2.2}$$

thì

$$\frac{S_{N_n} - E(S_{N_n})}{\sqrt{VarS_{N_n}}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0,1). \tag{2.2.3}$$

Trong bài báo này chúng ta có thể chỉ ra được rằng, điều kiện 2.2.2 chưa đủ để tổng ngẫu nhiên tuân theo định lý giới hạn trung tâm và tồn tại một số phân phối của N_n không thỏa điều kiện 2.2.3 trong định lý 2.2.8, nhưng tổng ngẫu nhiên S_{N_n} vẫn tuân theo định lý giới hạn trung tâm.

Định lý 2.2.9. *Giả sử $\{\xi_k, k \geq 1\}$ là dãy b.n.n., $\{N_n, n \geq 1\}$ là dãy b.n.n. nhận giá trị nguyên dương và N_n độc lập với các b.n.n. $\{\xi_k, k \geq 1\}$ với mỗi n. Khi đó, với $N_n \xrightarrow{P} \infty$ thì*

i. Nếu $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ thì $\xi_{N_n} \xrightarrow{P} \xi$,

ii. Nếu $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ thì $\xi_{N_n} \xrightarrow{d} \xi$.

Chú ý rằng, điều kiện $N_n \xrightarrow{P} \infty$ được sử dụng trong việc thiết lập một số kết quả liên quan tới phân phối tiệm cận của tổng ngẫu nhiên S_{N_n} (xem chi tiết trong [?]). Trong khi đó với giả thiết $\frac{N_n}{n} \xrightarrow{P} 1$, W. Feller (tham khảo [9]) có kết quả sau

Định lý 2.2.10. *(Feller's Theorem) Giả sử $X_1, X_2, \ldots$ là một dãy b.n.n. độc lập, cùng phân phối với $E(X_1) = 0, D(X_1) = 1$. Ngoài ra, giả sử $N_1, N_2, \ldots$ là một dãy b.n.n. nhận giá trị nguyên không âm và độc lập với mọi $\{X_k, k \geq 1\}$. Khi đó, nếu*

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{P} 1 \quad \text{thì} \quad \frac{S_{N_n}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Chú ý rằng, ta dễ nhận thấy mối quan hệ giữa 3 điều kiện vừa nêu trên

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{P} 1 \quad \Longrightarrow \quad N_n \xrightarrow{P} \infty \quad \Longrightarrow \quad E(N_n) \to \infty.$$

Định lý 2.2.11. *Giả sử $X_1, X_2, \ldots$ là dãy b.n.n độc lập, cùng phân phối với $E(X_1) = 0, D(X_1) = 1$. (N_n) là dãy b.n.n thuộc phân phối Poisson(λ_n) và độc lập với (X_k). Khi đó, nếu*

$$\frac{\lambda_n}{n} \to 1 \quad \text{thì} \quad \frac{S_{N_n}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1).$$

Định lý 2.2.12. *Giả sử $X_1, X_2, \ldots$ là dãy b.n.n độc lập, cùng phân phối, có $E(X_1) < \infty, 0 < E(X_1^2) < \infty$. $\{N_n, n \geq 1\}$ là một dãy b.n.n thuộc phân phối Poisson(λ_n) và độc lập với $\{X_k, k \geq 1\}$. Khi đó, nếu*

$$\lambda_n \to \infty \quad \text{thì} \quad \frac{S_{N_n} - \lambda_n E(X_1)}{\sqrt{\lambda_n E(X_1^2)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

Định lý 2.2.13. *Giả sử $X_1, X_2, \ldots$ là một dãy b.n.n độc lập, cùng phân phối, có các moment hữu hạn. Giả sử $\{N_n, n \geq 1\}$ là một dãy b.n.n thuộc phân phối Binomial(n,p) và độc lập với $\{X_k, k \geq 1\}$. Khi đó,*

$$\frac{S_{N_n} - E(S_{N_n})}{\sqrt{Var(S_{N_n})}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

Định lý 2.2.14. *Giả sử $X_1, X_2, \ldots$ là dãy b.n.n độc lập, cùng phân phối với $E(X) = 0, D(X) = 1, \{N_n, n \geq 1\}$ là một dãy b.n.n thuộc phân phối Geometry(p_n) và độc lập với $\{X_k, k \geq 1.\}$ Khi đó, nếu*

$$p_n \to 0 \quad \text{thì} \quad \frac{S_{N_n}}{\sqrt{E(N_n)}} \xrightarrow{d} Z \nsim N(0,1)$$

Chú ý 2.2.1.
1. *Từ Định lý 2.2.14, ta có $E(N_n) = 1/p_n \to \infty$ nhưng S_{N_n} không tuân theo định lý giới hạn trung tâm. Do đó điều kiện $E(N_n) \to \infty$ chưa đủ để tổng ngẫu nhiên tuân theo định lý giới hạn trung tâm.*

2. *Ta thấy chỉ số ngẫu nhiên ứng với hai phân phối Poisson và Binomial, với giả thiết $E(N_n) \to \infty$, có các tính chất sau*

$$\frac{E(N_n^k)}{E^k(N_n)} \to 1 \quad (k = 1, 2, ...); \quad \frac{D(N_n)}{E(N_n)} = C(0 < C \leq 1).$$

Định lý 2.2.15. *Giả sử $X_1, X_2, \ldots$ là một dãy b.n.n độc lập, cùng thuộc phân phối chuẩn chính tắc. Giả sử $\{N_n, n \geq 1\}$ là một dãy b.n.n có $E(N_n) < \infty$ và thỏa*

$$E(N_n) \to \infty, \quad \frac{E|N_n - E(N_n)|}{E(N_n)} \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty,$$

thì

$$\frac{S_{N_n}}{\sqrt{E(N_n)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

Định lý 2.2.16. *(Luật yếu số lớn cho tổng ngẫu nhiên) Giả sử $X_1, X_2, \ldots$ là một dãy b.n.n độc lập, cùng phân phối với $E|X_1| < \infty, E(X_1) = \mu, S_n = X_1 + \ldots + X_n$ và $\{N_n, n \geq 1\}$ là một dãy b.n.n nhận giá trị nguyên dương, độc lập với $\{X_k, k \geq 1\}$. Khi đó, nếu*

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{P} 1 \quad \text{thì} \quad \frac{S_{N_n}}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

Định lý 2.2.17. *Giả sử* $\{X_i, i \geq 1\})$ *là một dãy b.n.n độc lập, cùng phân phối. Xét tổng ngẫu nhiên* S_{N_n} *với* $N_n \sim Binomial(n, p_n)$ *thỏa* $np_n \to \lambda$. *Khi đó*

$$S_{N_n} \xrightarrow{d} S_N \text{ với } N \sim Poisson(\lambda).$$

Chương 3

Các đánh giá qua khoảng cách Trotter

Nội dung chính của chương này liên quan tới việc sử dụng phương pháp khoảng cách xác suất Trotter nhằm đánh giá tốc độ hội tụ trong một số định lý giới hạn, cũng như đánh giá khoảng cách Trotter giữa hai tổng (và giữa hai tổng ngẫu nhiên) các biến ngẫu nhiên độc lập (hay các véc tơ ngẫu nhiên độc lập). Các kết quả chính của chương này, cũng là kết quả chính của đề tài, đã được công bố trong các tài liệu [18]-[23].

3.1 Khoảng cách xác suất Trotter

Trong phần này, định nghĩa và các tính chất của khoảng cách xác suất trên cơ sở toán tử Trotter được xét tới. Một số quan hệ giữa các khoảng cách xác suất cổ điển và khoảng cách xác suất Trotter cũng được đề cập tới (có thể xem chi tiết trong các tài liệu [30], [7], [8], [51]-[54], [17] và [18]).

Định nghĩa 3.1.1. *Khoảng cách Trotter $d_T(X, Y; f)$ của hai biến ngẫu nhiên X và Y, xác định bởi*

$$d_T(X, Y; f) := \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\{ \left| Ef\big(X+t\big) - Ef\big(Y+t\big) \right| \right\}, \tag{3.1.1}$$

ở đây $f \in C_B^r(\mathbb{R})$.

Chú ý rằng định nghĩa trong 3.1.1 cho thấy khoảng cách xác suất Trotter được xác định qua chuẩn của hiệu hai toán tử Trotter tương ứng với các biến ngẫu nhiên X và Y.

$$d_T(X, Y; f) = \| T_X f - T_Y f \| .$$

Lưu ý rằng năm 1989 H. Kirschfink trong [30] cũng đã đề cập tới khoảng cách Trotter được xây dựng trên cơ sở toán tử Trotter tổng quát (qua khái niệm kỳ vọng có điều kiện), mối quan hệ của nó với các khoảng cách xác suất cổ điển và sử dụng nó trong nghiên cứu các định lý giới hạn cho các biến ngẫu nhiên phụ thuộc (xem chi tiết trong [30]).

Các tính chất quan trọng của khoảng cách Trotter được xét dưới đây. Các chứng minh chi tiết nhận được dễ dàng nhờ các tính chất của toán tử Trotter (xem chi tiết trong [30], [17] và [18]).

1. Khoảng cách $d_T(X, Y; f)$ là một khoảng cách xác suất.

2. Nếu $d_T(X, Y; f) = 0$ với $f \in C_B^r(\mathbf{R})$, thì $F_X \equiv F_Y$.

3. Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên và X là một biến ngẫu nhiên xác định trên cùng một không gian xác suất. Khi đó,
$$X_n \xrightarrow{w} X, \quad \text{khi} \quad n \to \infty$$
nếu
$$\lim_{n \to +\infty} d_T(X_n, X; f) = 0, \quad \text{với} \quad f \in C_B^r(\mathbb{R}).$$

4. Giả sử $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ và $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ là hai nhóm các biến ngẫu nhiên độc lập. Khi đó, với $f \in C_B^r(\mathbb{R})$
$$d_T\Bigg(\sum_{j=1}^{n} X_j, \sum_{j=1}^{n} Y_j; f\Bigg) \leq \sum_{j=1}^{n} d_T\Bigg(X_j, Y_j; f\Bigg). \tag{3.1.2}$$

5. Giả sử $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ và $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ là hai nhóm các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối. Khi đó, với $f \in C_B^r(\mathbb{R})$
$$d_T\Bigg(\sum_{j=1}^{n} X_j, \sum_{j=1}^{n} Y_j; f\Bigg) \leq n d_T\Bigg(X_1, Y_1; f\Bigg). \tag{3.1.3}$$

6. Giả sử $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ và $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ là hai nhóm các biến ngẫu nhiên độc lập. Ngoài ra, giả sử N là một biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương, độc lập với các biến ngẫu nhiên trong hai nhóm $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ và $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$. Khi đó, với $f \in C_B^r(\mathbb{R})$
$$d_T\Bigg(\sum_{j=1}^{N} X_j, \sum_{j=1}^{N} Y_j; f\Bigg) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) \sum_{j=1}^{n} d_T\Bigg(X_j, Y_j; f\Bigg). \tag{3.1.4}$$

Để kết thúc phần này, chúng ta lưu ý rằng quan hệ giữa các khoảng cách xác suất Zolotarev và khoảng cách Trotter (xem chi tiết trong tài liệu [30] của H. Kirschfink)
$$\sup\Bigg\{d_T(X, Y; f); f \in D_1(s; r+1; C_B(\mathbb{R}))\Bigg\} = d_Z(X, Y)$$
cho thấy việc nghiên cứu khoảng cách xác suất dạng Trotter là cần thiết trong các bài toán giới hạn của tổng các biến ngẫu nhiên độc lập.

3.2 Đánh giá tốc độ hội tụ trong Luật yếu các số lớn

Phần này chúng tôi sử dụng khoảng cách xác suất Trotter trong đánh giá tốc độ hội tụ trong Luật yếu số lớn dạng Khintchin. Kết quả nhận được dưới đây có thể được so sánh với kết quả của V. V. Petrov trong [39]. Phương pháp chứng minh được sử dụng tương tự trong [15] và [18], dựa trên kết quả từ sự hội tụ của khoảng cách xác suất $d_T(S_n; X^0; f)$ tới 0 khi $n \to \infty$, sẽ dẫn tới sự hội yếu $S_n \xrightarrow{w} X^0$, điều này lại cho phép $S_n \xrightarrow{P} X^0$, khi $n \to \infty$. Chính vì vậy mà mối quan tâm của chúng ta hiện nay là tốc độ hội tụ của khoảng cách xác suất Trotter tới 0, khi n dần ra vô hạn,

$$d_T(S_n; X^0; f) \to 0 \quad \text{khi} \quad n \to +\infty.$$

Chúng ta có kết quả sau.

Định lý 3.2.1. *(xem [18]) Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối với kỳ vọng 0 và mô mem bậc r hữu hạn $E(\mid X_j \mid^r) < +\infty$ với $r \geq 1$ và với $j = 1, 2, \ldots n$. Khi đó, với mọi $f \in C^r(R)$, chúng ta có đánh giá sau*

$$d_T(S_n; X^0; f) = o(n^{-(r-1)}), \quad \textit{khi} \quad n \to +\infty. \tag{3.2.5}$$

Kết quả trên được mở rộng khi chỉ số n của tổng S_n được thay bởi một biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương. Giả sử $\{N_n; n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương, thỏa mãn

$$N_n \xrightarrow{P} +\infty, \quad \textit{khi} \quad n \to +\infty.$$

Ngoài ra, chúng ta cũng giả sử rằng $N_n, n \geq 1$ độc lập với mọi biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots$. Khi đó, chúng ta có thể ngẫu nhiên hóa kết quả của định lý trên.

Định lý 3.2.2. *(xem [18]) Giả sử $\{X_n; n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối với kỳ vọng 0 và giả sử với $r \geq 1, j = 1, 2, \ldots, E|X_j|^r < +\infty$. Ngoài ra, giả sử rằng $\{N_n; n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương, độc lập với mọi biến ngẫu nhiên $X_j, j = 1, 2, \ldots n$, thỏa mãn điều kiện*

$$N_n \xrightarrow{P} +\infty \quad \textit{khi} \quad n \to +\infty.$$

Khi đó, với mọi hàm $f \in C_B^r(\mathbb{R})$, quan hệ

$$d_T(S_{N_n}; X^0; f) = o(E(N_n)^{-(r-1)}), \quad \textit{khi} \quad n \to +\infty \tag{3.2.6}$$

luôn đúng.

Chú ý rằng chứng minh nhanh chóng nhận được từ kết quả của Định lý 2.2.1, nếu ta sử dụng bất đẳng thức (3.2.6).

Định lý 3.2.3. *(xem [18]) Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối với trung bình 0 và $0 < D(X_j) = \sigma^2 \leq M_2 < +\infty$, với mọi $j = 1, 2, \ldots n$. Khi đó, với mọi $f \in C_B(\mathbb{R})$, chúng ta có đánh giá*

$$d_T(S_n; X^0; f) \leq (2 + M_2)\omega(f; n^{-\frac{1}{2}}). \tag{3.2.7}$$

Để kết thúc phần này, chúng ta có một số chú ý sau

Chú ý 3.2.1. *1. Trường hợp $r = 1$ từ (3.2.7) chúng ta sẽ có Luật yếu các số lớn dạng Khincthin (xem [9]).*

2. Khi $r = 1$, từ (3.3.8) chúng ta sẽ nhận được Luật yếu số lớn cho tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập (xem [21] và [25]).

3. Sử dụng tính chất $\omega(f; n^{-\frac{1}{2}}) \to 0$ khi $n \to +\infty$, từ (3.3.9) chúng ta sẽ nhận được Luật yếu các số lớn dạng Chebyshev.

3.3 Tốc độ hội tụ các định lý giới hạn của tổng ngẫu nhiên qua khoảng cách Trotter

Phương pháp khoảng cách xác suất được sử dụng rộng rãi trong Lý thuyết xác suất, nhất là trong các bài toán liên quan đến các định lý giới hạn (xem các tài liệu [1], [2], [51]-[54], [15], [16], [17], [18]). Một trong số đó là khoảng cách Trotter được xây dựng trên cơ sở toán tử Trotter trong [49]. Khoảng cách Trotter được dùng nhiều trong việc đánh giá tốc độ hội tụ của luật số lớn và định lý giới hạn trung tâm của tổng các biến ngẫu nhiên (xem [1], [2], [17]). Mục đích chính của phần này là thiết lập tốc độ hội tụ của một số định lý giới hạn đối với tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập $S_{N_n} = X_1 + X_2 + \ldots X_{N_n}$ bằng phương pháp khoảng cách xác suất Trotter. Các kết quả nhận được là sự tiếp tục và tổng quát các kết quả trong [19], [20]. Các kết quả chính của phần này đã được công bố trong [21], vì vậy các chứng minh chi tiết sẽ được bỏ qua. Chú ý rằng trong suốt phần này chỉ số ngẫu nhiên $N_n, n \geq 1$ của tổng S_{N_n} luôn là các biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương, độc lập với mọi biến ngẫu nhiên độc lập $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$.

Trong các bài báo [19], [20] chúng tôi đã đưa ra một số kết quả liên quan tới dáng điệu tiệm cận của tổng ngẫu nhiên bằng phương pháp hàm đặc trưng. Dưới đây, ta sẽ thiết lập một số kết quả về tốc độ hội tụ của tổng ngẫu nhiên qua khoảng cách Trotter. Những kết quả này là sự cụ thể hóa cho các kết quả đã có của H. Robbins, W. Feller, B. Gnhedenko và A. Renyi (xem các tài liệu [42], [9], [13], [14] và [41]). Các kết quả chính của phần này được thể hiện qua các định lý dưới đây.

Định lý 3.3.1. *Giả sử* $\{X_n, n \geq 1$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối với kỳ vọng 0 và moment tuyệt đối cấp* $r+1$ *hữu hạn* $(r \geq 2)$*. Giả sử* $\{N_n, n \geq 1\}$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương, độc lập với mọi biến ngẫu nhiên* $X_j, j = 1, 2, \ldots$ *Ngoài ra, giả sử* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$*, là một hàm số không âm, xác định trên* $\mathbb{N}$ *và thỏa mãn các điều kiện*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \varphi(n)E(N_n) < \infty. \tag{3.3.8}$$

Khi đó, với $f \in C_B^r(\mathbb{R})$,

$$d_T(\varphi(n)S_{N_n}, X^o; f) = O[\varphi(n)].$$

Nhận xét 3.3.1. *Theo tính chất của khoảng cách xác suất Trotter và mối liên hệ giữa các dạng hội tụ trong lý thuyết xác suất, từ kết quả của định lý suy ra rằng*

$$\varphi(n)S_{N_n} \xrightarrow{P} 0, \quad \textit{khi } n \to \infty.$$

Hệ quả 3.3.1. *Giả sử* $\{X_n, n \geq 1\}$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối với kỳ vọng 0 và* $EX_n^2 < \infty$*. Giả sử, các biến ngẫu nhiên* $N_n, n \geq 1$ *độc lập với mọi* $X_j, j = 1, 2, \ldots$ *thỏa mãn* $\lim\limits_{n\to\infty} E(N_n) = \infty$*. Khi đó*

$$\frac{S_{N_n}}{E(N_n)} \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty.$$

Hệ quả 3.3.2. *Giả sử* $\{X_n, n \geq 1\}$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối với kỳ vọng* $\mu = E(X_n)$ *và* $EX_n^2 < \infty$*. Giả sử các biến ngẫu nhiên* $N_n, n \geq 1$ *độc lập với mọi* $X_j, j = 1, 2, \ldots$ *thỏa mãn* $\frac{N_n}{n} \xrightarrow{P} 1$*. Khi đó,*

$$\frac{S_{N_n}}{n} \xrightarrow{P} \mu, \quad n \to \infty.$$

Định lý 3.3.2. *Giả sử* $\{X_n, n \geq 1\}$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối với kỳ vọng 0 và moment tuyệt đối cấp* $r+1$ *hữu hạn* $(r \geq 2)$*. Giả sử* $\{N_n, n \geq 1\}$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương, độc lập với mọi biến ngẫu nhiên* $X_j, j = 1, 2, \ldots$*. Ngoài ra, giả sử* $\varphi(n)$ *là hàm số không âm, xác định trên* $\mathbb{N}$ *và thỏa mãn*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} E[N_n\varphi^2(N_n)] = 0. \tag{3.3.9}$$

Khi đó, với $f \in C_B^r(\mathbb{R})$,

$$d_T(\varphi(N_n)S_{N_n}, X^o; f) = O\Big(EN_n\varphi^2(N_n)\Big).$$

Nhận xét 3.3.2. *Kết quả của định lý 3.3.2 kéo theo rằng*

$$\varphi(N_n)S_{N_n} \xrightarrow{P} 0 \quad \textit{khi } n \to \infty.$$

Hệ quả 3.3.3. *Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, có cùng phân phối với kỳ vọng $\mu = E(X_n)$ và $EX_n^2 < \infty$. Giả sử các biến ngẫu nhiên $N_n, n \geq 1$ độc lập với mọi $X_j, j = 1, 2, \ldots$ thỏa mãn điều kiện $N_n \xrightarrow{P} \infty$. Khi đó,*

$$\frac{S_{N_n}}{N_n} \xrightarrow{P} \mu, \quad n \to \infty.$$

Định lý 3.3.3. *Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, có cùng phân phối chuẩn chính tắc $N(0, 1)$. Giả sử $N_n, n \geq 1$ là các biến ngẫu nhiên nguyên dương, độc lập với mọi $X_j, j = 1, 2, \ldots$ thỏa mãn các điều kiện*

$$EN_n \to \infty, \quad \frac{E|N_n - EN_n|}{EN_n} \to 0, \quad \textit{khi } n \to \infty.$$

Khi đó, với $f \in C_B^2(\mathbb{R})$,

$$d_T(S_{N_n}/\sqrt{EN_n}, X^*; f) \to 0, \quad \textit{khi } n \to \infty.$$

Hệ quả 3.3.4. *Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối chuẩn chính tắc $N(0, 1)$ Giả sử các biến ngẫu nhiên $N_n, n \geq 1$ thỏa mãn điều kiện của Định lý 3.3.3 Khi đó,*

$$\frac{S_{N_n}}{\sqrt{E(N_n)}} \xrightarrow{w} X^*, \quad \textit{khi } n \to \infty.$$

3.4 Đánh giá khoảng cách xác suất Trotter của hai tổng các vectơ ngẫu nhiên độc lập

Trong suốt phần này, giả sử $R^d = \{x | x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(d)})\}$ là không gian Ơclid d chiều ($d \geq 1$) với tích vô hướng $(x, y) = \sum_{i=1}^d x^{(i)} y^{(i)}$ và chuẩn $\| x \| = (\sum_{i=1}^d x^{(i)2})^{\frac{1}{2}}$. Ngoài ra, giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy các véc tơ ngẫu nhiên d chiều, độc lập, xác định trên không gian xác suất $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, có $E \| X_i \|^r < +\infty, i = 1, 2, \ldots, n; \quad r \geq 1$.

Chúng ta xét dãy $\{Y_n, n \geq 1\}$ các véc tơ ngẫu nhiên d chiều độc lập khác, độc lập với các véc tơ từ dãy $\{X_n, n \geq 1\}$, xác định trên cùng không gian xác suất $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ và có $E \| Y_i \|^r < +\infty, i = 1, 2, \ldots, n; \quad r \geq 1$.

Đặt $S_n^X := \varphi(n) \sum_{i=1}^n X_i$ và $S_n^Y := \varphi(n) \sum_{i=1}^n Y_i$, ở đây $\varphi : \mathcal{N} \to R^+$ là một hàm dương với $\varphi(n) \to 0$, khi $n \to +\infty$.

Các kết quả chính của phần này là các đánh giá về khoảng cách xác suất $d_T(S_n^X; S_n^Y; f)$ tương ứng với hai tổng S_n^X and S_n^Y, ở đây $d_T(S_n^X; S_n^Y; f)$ xác định bởi

$$d_T(S_n^X; S_n^Y; f) := \sup_{y \in R^d} \| Ef(S_n^X + y) - Ef(S_n^Y + y) \|, \tag{3.4.10}$$

là khoảng cách xác suất dạng Trotter (xem chi tiết trong [30] and [19]), với mỗi $f \in C_B(R^d)$.

Các kết quả nhận được trong phần này là sự mở rộng hình thức các kết quả đã có trong [40], [45] và [18]. Phương pháp sử dụng trong bài báo này tương tự như đã sử dụng trong các tài liệu [9], [17], [30], [40], [41] và [45] nhưng phải khẳng định rằng ý tưởng ban đầu do H. F. Trotter đưa ra trong [49] (xem nhận xét của W. Feller trong tài liệu [9] và của V. Sakalauskas trong tài liệu [46]).

Trong suốt nhiều thập kỷ qua, kể từ khi xuất hiện bài báo của H. F. Trotter năm 1959 (xem chi tiết trong [49]), một hướng nghiên cứu mới (thay vì sử dụng phương pháp hàm đặc trưng) đã thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học, và nhiều kết quả sâu sắc liên quan tới đánh giá tốc độ hội tụ trong các định lý giới hạn của tổng các biến ngẫu nhiên độc lập đã được thiết lập qua việc sử dụng phương pháp của Trotter (xem các kết quả của [9], [41], [40], [30] và [45]), đặc biệt phương pháp này có tác dụng lớn trong nghiên cứu các định lý giới hạn cho các véc tơ trên không gian nhiều chiều (xem ý kiến đánh giá của V. Sakalauskas về phương pháp Trotter trong [46]).

Trước khi đi tới kết quả chính của phần này, chúng ta nhắc lại định nghĩa khoảng cách xác suất dạng Trotter của hai véc tơ ngẫu nhiên d chiều (mặc dù chỉ là hình thức từ định nghĩa khoảng cách xác suất giữa hai biến ngẫu nhiên một chiều). Giả sử X và Y là hai véc tơ ngẫu nhiên d chiều ($d \geq 1$) và $f \in C_B^r(R^d) = \{f \mid f^{(j)} \in C_B(R^d), j = 1, 2, \dots r.\}$. Khoảng cách xác suất dạng Trotter $d_T(X, Y; f)$ của hai véc tơ ngẫu nhiên X và Y, được xác định bởi

$$d_T(X; Y; f) := \sup_{y \in R^d} \parallel Ef(X + y) - Ef(Y + y) \parallel . \tag{3.4.11}$$

Các tính chất cơ bản của khoảng cách Trotter đối với hai véc tơ ngẫu nhiên d chiều ($d \geq 1$) được mô tả dưới đây, hoàn toàn không khác so với các tính chất của khoảng cách xác suất dạng Trotter tương ứng với biến ngẫu nhiên (1 chiều) trong [30], [17] và [18] . Vì vậy chúng tôi bỏ qua các chứng minh chi tiết (xem [40], [45], [19] và [20]).

1. Khoảng cách $d_T(X, Y; f)$ là một khoảng cách xác suất. (xem định nghĩa trong các tài liệu [7], [8], [51] – [54]).

2. Nếu $d_T(X, Y; f) = 0$, với mọi $f \in C_B^r(R^d)$, thì $F_X \equiv F_Y$.

3. Giả sử $X, X_1, X_2, \dots$ là các véc tơ ngẫu nhiên d chiều, xác định trên không gian xác suất $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Khi đó,
$$X_n \xrightarrow{w} X, \quad \text{khi} \quad n \to \infty,$$
nếu
$$\lim_{n \to +\infty} d_T(X_n, X; f) = 0, \quad \text{với mọi hàm} \quad f \in C_B^r(R^d).$$

4. Giả sử $X_1, X_2, \ldots, X_n$ và $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ là các véc tơ ngẫu nhiên d chiều độc lập (trong từng nhóm và hai nhóm độc lập với nhau). Khi đó, với mọi hàm $f \in C_B^r(R^d)$

$$d_T\Big(\sum_{j=1}^n X_j, \sum_{j=1}^n Y_j; f\Big) \leq \sum_{j=1}^n d_T\Big(X_j, Y_j; f\Big). \tag{3.4.12}$$

5. Đặc biệt, nếu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ và $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ là hai nhóm các véc tơ độc lập, cùng phân phối (theo từng nhóm), thì với mọi hàm $f \in C_B^r(R^d)$

$$d_T\Big(\sum_{j=1}^n X_j, \sum_{j=1}^n Y_j; f\Big) \leq n d_T\Big(X_1, Y_1; f\Big). \tag{3.4.13}$$

Để nhận được các kết quả chính của phần này, chúng ta cần tới biểu diễn Taylor của một hàm $f \in C_B^r(R^d)$ (xem chi tiết trong [31] và [45]).

$$f(x+y) = f(y) + f^{'}(y)(x) + \frac{1}{2!}f^{"}(y)(x)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(y+\Theta x)(x)^n, \tag{3.4.14}$$

ở đây,

$$0 < \Theta < 1, (x)^i = \underbrace{(x, x, \ldots, x)}_{i} \in \underbrace{R^d \times R^d \times \ldots R^d}_{i}.$$

Khái niệm và các tính chất của mô đun liên tục của một hàm $f \in C_B(R^d)$ đóng vai trò quan trọng trong một số đánh giá liên quan tới khoảng cách xác suất Trotter (xem các tài liệu [45] và [40]). Nếu $f \in C_B(R^d), x, h \in R^d, \delta > 0$, thì hàm

$$\omega(f;\delta) := \sup_{\|y\| \leq \delta, x \in R^d} \| f(x+y) - f(x) \|$$

được gọi là mô đun liên tục của hàm f. Chúng ta có thể liệt kê một số tính chất cơ bản của $\omega(f;\delta)$ (xem chứng minh chi tiết trong các tài liệu [40] và [45]).

1. $\omega(f;\delta)$ là một hàm đơn điệu giảm theo δ;

2. $\omega(f;\delta) \to 0$ khi $\delta \to +0$;

3. $\omega(f;\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega(f;\delta)$, ở đây $\lambda \in R^+$.

Ngoài ra, ta nói hàm $f \in C_B(R^d)$ thỏa mãn điều kiện Lipshitz bậc $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, ký hiệu $f \in Lip(\alpha)$, nếu $\omega(f;\delta) = 0(\delta^\alpha)$.

Chúng ta nói dãy các véc tơ ngẫu nhiên d chiều $X_1, X_2, \ldots, X_n$ thỏa mãn điều kiện Lindeberg tổng quát bậc r, $r \geq 1$, nếu với mọi $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^n E\| X_i \|^r I(\| X_i \| \geq \delta[\varphi(n)]^{-1})}{\sum_{i=1}^n E\| X_i \|^r} = 0, \tag{3.4.15}$$

ở đây, $I(A)$ là hàm chỉ tiêu của tập A, còn φ là hàm đã được nhắc tới ở trên (xem [30] về điều kiện Lindeberg tổng quát bậc $r, r \geq 1$ đối với trường hợp các biến ngẫu nhiên 1 chiều và điều kiện Lindeberg bậc 2 trong các tài liệu [9], [41], [45], [40] và [46]).

Các kết quả trong phần này đã công bố trong [19], vì vậy chúng tôi bỏ qua các chứng minh chi tiết các kết quả dưới đây.

Định lý 3.4.1. *Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ và $\{Y_n, n \geq 1\}$ là hai dãy các véc tơ ngẫu nhiên d chiều độc lập (theo từng dãy), thỏa mãn với $1 \leq j \leq r, i = 1, 2, \ldots, n$*

$$E\left[(X_i)^j\right] = E\left[(Y_i)^j\right] \tag{3.4.16}$$

và hai dãy $\{X_n, n \geq 1\}, \{Y_n, n \geq 1\}$ thỏa mãn điều kiện (3.4.16) với $r \geq 2$. Khi đó, với mọi hàm $f \in C_B^r(R^d)$ và $n \to +\infty$,

$$d_T(S_n^X; S_n^Y; f) = o\left\{\frac{[\varphi(n)]^r}{r!}\sum_{i=1}^{r}(E\| X_i \|^r + E\| Y_i \|^r)\right\}. \tag{3.4.17}$$

Định lý 3.4.2. *Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ và $\{Y_n, n \geq 1\}$ là hai dãy các véc tơ ngẫu nhiên d chiều độc lập (theo từng dãy), thỏa mãn điều kiện (3.4.17) với $1 \leq j \leq r-1, i = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó, với mọi hàm $f \in C_B^{r-1}(R^d)$, ta có đánh giá*

$$d_T(S_n^X, S_n^Y, f) \leq \frac{2[\varphi(n)]^{r-1}}{(r-1)!} \times \omega(f^{(r-1)}, \varphi(n)\sum_{i=1}^{n}\overline{N_i(r)}), \tag{3.4.18}$$

và, nếu $f \in Lip(\alpha), 0 < \alpha \leq 1$, thì khi $n \to +\infty$,

$$d_T(S_n^X, S_n^Y, f) = 0\{\frac{2[\varphi(n)]^{r-1+\alpha}}{(r-1)!} \times \omega(f^{(r-1)}, \varphi(n)\sum_{i=1}^{n}\overline{N_i(r)})\}, \tag{3.4.19}$$

ở đây

$$\overline{N_i(r)} = \max(E\| X_i \|^r, E\| X_i \|^{r-1}) + \max(E\| Y_i \|^r, E\| Y_i \|^{r-1}). \tag{3.4.20}$$

3.5 Đánh giá khoảng cách Trotter đối với hai tổng ngẫu nhiên các véc tơ ngẫu nhiên độc lập

Mục đích chính của phần này là thiết lập một số ước lượng đối với khoảng cách Trotter của hai tổng ngẫu nhiên của các véc tơ ngẫu nhiên d- chiều độc lập. Các ước lượng được xây dựng trong hai dạng "O-lớn" và "o-bé". Các kết quả nhận được là sự mở rộng của các kết quả của H.F. Trotter, P.L. Butzer, L. Hahn, H. Kirschfink và Trần Lộc Hùng (đối với trường hợp 1 chiều); Prakasa B.L.S. Rao, V. Sakalauskas và Trần Lộc Hùng (đối với trường hợp d-chiều), (xem chi tiết trong các tài liệu [49], [1], [2], [30], [18]-[24]). Phải nhấn mạnh rằng ý tưởng và phương pháp tư duy trong phần này (cũng như trong tất cả các phần của báo cáo) thuộc về H.F. Trotter [49], P.L. Butzer [1], Prakasa B.L.S. Rao [40] và V. Sakalauskas [45].

Giả sử $\mathbb{R}^d = \{x | x = (x^{(1)}, \cdots, x^{(d)})\}$ là một không gian Oclid d chiều ($d \geq 1$) với chuẩn thông thường $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{d} x^{(i)2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Giả sử rằng $\{X_n, n \geq 1\}$ và $\{Y_n, n \geq 1\}$ là hai dãy các véc tơ ngẫu nhiên độc lập d- chiều, xác định trên cùng một không gian xác suất $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Ngoài ra, giả sử $\{N_n, n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương, sao cho với $n \geq 1$, các biến ngẫu nhiên N_n và tất cả các véc tơ ngẫu nhiên d chiều từ hai dãy $\{X_n, n \geq 1\}$ và $\{Y_n, n \geq 1\}$ là độc lập.

Phần này của báo cáo mô tả các đánh giá đối với khoảng cách xác suất dạng Trotter (được xây dựng trên cơ sở toán tử Trotter) giữa hai tổng ngẫu nhiên các véc tơ ngẫu nhiên độc lập d chiều $S^X_{N_n}$ và $S^Y_{N_n}$ (xem định nghĩa khoảng cách xác suất dạng Trotter trong phần trước hoặc [18] and [19]).

$$d_T(S^X_{N_n}, S^Y_{N_n}, f) = \sup_{y \in R^d} \|Ef(S^X_{N_n} + y) - Ef(S^Y_{N_n} + y)\|, \tag{3.5.21}$$

ở đây $f \in C_B(R^d)$ - lớp các hàm liên tục đều, bị chặn trên $\mathbb{R}^d$ với chuẩn $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|f(x)\|$; $S^X_{N_n} := \varphi(N_n) \sum_{i=1}^{N_n} X_i$, $S^Y_{N_n} := \varphi(N_n) \sum_{i=1}^{N_n} Y_i$, và φ là một hàm số dương với $\varphi(N_n) \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Các đánh giá đối với khoảng cách Trotter trong phần này được thiết lập trong hai dạng cơ bản là "O-lớn" và "o-nhỏ". Các kết quả nhận dược là sự mở rộng của các kết quả đã có trong [49], [1], [2] [15], [16] và [30] (đối với trường hợp 1 chiều); [40], [45] và [17] (đối với trường hợp d chiều).

Hoàn toàn cần thiết phải nhắc lại là ý tưởng và phương pháp sử dụng trong phần này tương tự như đã sử dụng trong [49], [1], [2], [40], [45]. Và trong các tài liệu [36] và [46] cũng khẳng định rằng phương pháp này có thể sử dụng trong các môi trường ngẫu nhiên tổng quát hơn.

Trước khi bắt đầu các kết quả chính trong phần này, ngoài các tính chất của khoảng cách Trotter, xác định bởi (3.5.24) đã được xét trong phần trước (hoặc có thể xem chi tiết trong [30], [15] và [16] đối với trường hợp 1 chiều, [17] đối với trường hợp d chiều), chúng ta cần tới một bất đẳng thức mà chứng minh của nó không quá khó để nhận được.

Giả sử $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ và $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ là các véc tơ ngẫu nhiên d chiều độc lập (trong mỗi nhóm và hai nhóm độc lập). Ngoài ra, giả sử rằng $\{N_n, n \geq 1\}$ là một dãy các véc tơ ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương, độc lập với mọi $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ và

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$. Khi đó, với mọi $f \in C_B^r(R^d)$,

$$d_T\left(\sum_{j=1}^{N_n} X_j, \sum_{j=1}^{N_n} Y_j; f\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(N_n = n) \sum_{j=1}^{n} d_T(X_j, Y_j; f). \tag{3.5.22}$$

Dưới đây chúng tôi sẽ giới thiệu một sự tổng quát của điều kiện Lindeberg đối với các véc tơ ngẫu nhiên d chiều. Cụ thể, giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy các véc tơ ngẫu nhiên d chiều độc lập, có mô men bậc r hữu hạn, $r, r \geq 1$. Ngoài ra, giả sử $\{N_n, n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương, độc lập với mọi véc tơ ngẫu nhiên $X_n, n \geq 1$. Khi đó, dãy $\{X_n, n \geq 1\}$ được goi là thỏa mãn điều kiện Lindeberg ngẫu nhiên tổng quát bậc r, $r \geq 1$, nếu với mọi $\delta > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} E\left[\sum_{i=1}^{N_n} \int_{\|x\| > \delta/\varphi(N_n)} \|x\|^r dF_{X_i}(x) / \sum_{i=1}^{N_n} E\|X_i\|^r\right] = 0. \tag{3.5.23}$$

Chú ý 3.5.1. *1. Trường hợp biến ngẫu nhiên $N_n, n \geq 1$ nhận giá trị n với xác suất một, và nếu $\varphi(n) = \|B_n\|$ (xem định nghĩa của B_n trong [40]), khi đó (3.5.26) trở về điều kiện Lindeberg cổ điển đối với các véc tơ ngẫu nhiên d chiều mà đã xét bởi Prakasa B. L. S. Rao trong [40].*

2. Nếu $d = 1$, thì (3.5.23) trở về điều kiện Lindeberg tổng quát định nghĩa bởi P. L. Butzer in [2].

Trước khi xét tới kết quả chính của phần này, chúng ta ký hiệu, với $1 \leq j \leq r-1; i = 1, 2, \ldots, n$

$$\vartheta_i(j) := \sum_{\substack{1 \leq i_1, \ldots, i_j \leq d \\ r_1 + \ldots + r_j = j}} \left| \int_{R^d} x_{i_1}^{r_1} \ldots x_{i_j}^{r_j} d[F_{X_i}(x) - F_{Y_i}(x)] \right|, \tag{3.5.24}$$

và

$$\vartheta_{i,r} := \int_{R^d} \|x\|^r |d[F_{X_i}(x) - F_{Y_i}(x)]|. \tag{3.5.25}$$

Định lý 3.5.1. *Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ và $\{Y_n, n \geq 1\}$ là hai dãy các véc tơ ngẫu nhiên d chiều độc lập với*

$$\vartheta_i(j) = 0 \tag{3.5.26}$$

và

$$\vartheta_{i,r} < +\infty, \tag{3.5.27}$$

ở đây, $r \geq 1$ là một số cố định. Giả sử $\{N_n, n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương, độc lập với mọi $\{X_n, n \geq 1\}$ và $\{Y_n, n \geq 1\}$. Khi đó, với mỗi

$f \in C_B^{r-1}(R^d)$,

$$d_T(S_{N_n}^X, S_{N_n}^Y; f) \leq \frac{2}{(r-1)!} E\left\{[\varphi(N_n)]^{r-1}\omega(f^{(r-1)}; \varphi(N_n)) \sum_{i=1}^{N_n} \max(\vartheta_{i,r}^{1-1/r}; \vartheta_{i,r})\right\}. \tag{3.5.28}$$

Ngoài ra, nếu $f^{(r-1)} \in Lip(\alpha, M), 0 < \alpha \leq 1$, *thì*

$$d_T(S_{N_n}^X, S_{N_n}^Y; f) \leq \frac{2M}{(r-1)!} E\left\{[\varphi(N_n)]^{r-1+\alpha} \sum_{i=1}^{N_n} \max(\vartheta_{i,r}^{1-1/r}; \vartheta_{i,r})\right\}. \tag{3.5.29}$$

Hệ quả 3.5.1. *Giả sử* $\{X_n, n \geq 1\}$ *và* $\{Y_n, n \geq 1\}$ *là hai dãy các véc tơ ngẫu nhiên* d *chiều độc lập cùng phân phối, với*

$$\vartheta(j) := \sum_{\substack{1 \leq i_1, \ldots, i_j \leq d \\ r_1 + \ldots + r_j = j}} \left| \int_{R^d} x_{i_1}^{r_1} \ldots x_{i_j}^{r_j} d[F_{X_1}(x) - F_{Y_1}(x)] \right| = 0, \tag{3.5.30}$$

và

$$\vartheta(r) := \int_{R^d} \|x\|^r |d[F_{X_1}(x) - F_{Y_1}(x)]| < +\infty, \tag{3.5.31}$$

ở đây, $r \geq 1$ *là một số cố định. Giả sử* $\{N_n, n \geq 1\}$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên xác định như trong Định lý 2.2.9. Khi đó, với mọi* $f \in C_B^{r-1}(R^d)$,

$$d_T(S_{N_n}^X, S_{N_n}^Y; f) \leq \frac{[\vartheta(r) + \vartheta(r)^{1-1/r}]}{(r-1)!} E\{N_n[\varphi(N_n)]^{r-1}\omega(f^{(r-1)}, \varphi(N_n))\}. \tag{3.5.32}$$

Ngoài ra, nếu $f^{(r-1)} \in Lip(\alpha, M), 0 < \alpha \leq 1$, *thì*

$$d_T(S_{N_n}^X, S_{N_n}^Y; f) \leq \frac{2M}{(r-1)!} \max[\vartheta(r), \vartheta(r)^{1-1/r}] E\{N_n[\varphi(N_n)]^{r-1+\alpha}\}. \tag{3.5.33}$$

Định lý 3.5.2. *Giả sử* $\{X_n, n \geq 1\}$ *và* $\{Y_n, n \geq 1\}$ *là hai dãy các véc tơ ngẫu nhiên* d *chiều độc lập, thỏa mãn điều kiện (3.5.34), với* $r \geq 1$. *Giả sử* $\{N_n, n \geq 1\}$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương, độc lập với mọi* $\{X_n, n \geq 1\}$ *và* $\{Y_n, n \geq 1\}$. *Ngoài ra, giả sử*

$$\vartheta_{i,r-1+\delta} < +\infty, 0 < \delta < 1, i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.5.34}$$

Khi đó, với mọi $f \in C_B^{r-1}(R^d)$, *khi* $n \to \infty$,

$$d_T(S_{N_n}^X, S_{N_n}^Y; f) = O\left\{E\left([\varphi(N_n)]^{r-1+\delta} \sum_{i=1}^{N_n} \vartheta_{i,r-1+\delta}\right)\right\}. \tag{3.5.35}$$

Hệ quả 3.5.2. *Giả sử* $\{X_n, n \geq 1\}$ *và* $Y_n, n \geq 1$ *là hai dãy các véc tơ ngẫu nhiên* d *chiều độc lập, cùng phân phối sao cho các điều kiện (3.5.34) và (3.5.35) thỏa mãn. Giả sử* $\{N_n, n \geq 1\}$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên xác định như trong định lý 2.2.10. Khi đó, với mọi* $f \in C_B^{r-1}(R^d)$, *khi* $n \to \infty$

$$d_T(S_{N_n}^X, S_{N_n}^Y; f) = O\left\{E\left(N_n[\varphi(N_n)]^{r-1+\delta}\right)\right\}. \tag{3.5.36}$$

Định lý 3.5.3. *Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ và $\{Y_n, n \geq 1\}$ là hai dãy các véc tơ ngẫu nhiên d chiều độc lập với trung bình 0 và thỏa mãn điều kiện (3.5.37). Ngoài ra, giả sử*

$$\vartheta^X_{r,i} = E\|X_i\|^r < +\infty, \vartheta^Y_{r,i} = E\|Y_i\|^r < +\infty, E[\varphi(N_n)]^r < +\infty. \tag{3.5.37}$$

Giả sử

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(N_n) = 0 \tag{3.5.38}$$

và khi $n \to +\infty$

$$[\varphi(N_n)]^r \left(\sum_{i=1}^{N_n} \vartheta^X_{r,i} + \sum_{i=1}^{N_n} \vartheta^Y_{r,i}\right) = O\left\{E\left([\varphi(N_n)]^r \left(\sum_{i=1}^{N_n} \vartheta^X_{r,i} + \sum_{i=1}^{N_n} \vartheta^Y_{r,i}\right)\right)\right\} \text{ a.s.} \tag{3.5.39}$$

Khi đó, với mọi $f \in C^r_B(R^d)$, khi $n \to \infty$,

$$d_T(S^X_{N_n}, S^Y_{N_n}; f) = o\left\{\frac{1}{r!}E\left([\varphi(N_n)]^r \left(\sum_{i=1}^{N_n} \vartheta^X_{r,i} + \sum_{i=1}^{N_n} \vartheta^Y_{r,i}\right)\right)\right\}.$$

Hệ quả 3.5.3. *Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ và $\{Y_n, n \geq 1\}$ là hai dãy các véc tơ ngẫu nhiên d chiều, độc lập cùng phân phối, thỏa mãn điều kiện (3.5.34). Ngoài ra, giả sử $\vartheta^X_r := E\|X_1\|^r < +\infty, \vartheta^Y_r := E\|Y_1\|^r < +\infty, E[\varphi(N_n)]^r < +\infty$ và nếu hàm φ thỏa mãn điều kiện (3.5.32) và*

$$\varphi(N_n) = O(E[\varphi(N_n)]) \quad a.s. \quad khi \quad n \to +\infty. \tag{3.5.40}$$

Khi đó, với mỗi $f \in C^r_B(R^d)$, khi $n \to \infty$,

$$d_T(S^X_{N_n}, S^Y_{N_n}; f) = o\left\{\frac{1}{r!}E\left(N_n[\varphi(N_n)]^r\left(\vartheta^X_{r,i} + \vartheta^Y_{r,i}\right)\right)\right\}.$$

Chú ý 3.5.2. *Từ các kết quả nhận được ở phần này, chúng ta có các chú ý sau*

1. *Trường hợp $P(N_n = n) = 1$, các kết quả nhận được trùng với các kết quả ở phần trước, và cũng là sự mở rộng và tổng quát các kết quả của Prakasa B.L. S. Rao trong [40] và của V. Sakalauskas trong [45].*

2. *Với những dạng đặc biệt của hàm $\varphi(n)$ và các véc tơ ngẫu nhiên $Y_j, j = 1, 2, \ldots$, các kết quả của phần này sẽ là sự tổng quát các kết quả của Định lý giới hạn trung tâm cho tổng ngẫu nhiên các véc tơ ngẫu nhiên độc lập hoặc Luật yếu các số lớn đối với tổng ngẫu nhiên các véc tơ ngẫu nhiên độc lập.*

3.6 Tâm của một biến ngẫu nhiên

1. **Đặt vấn đề.** Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, xác định trên không gian xác suất $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ với kỳ vọng hữu hạn $\mathbb{E}(X_n) < +\infty, n \geq 1$.

Trong nghiên cứu Lý thuyết các định lý giới hạn, đặc biệt khi xét tới dáng điệu tiệm cận của tổng các biến ngẫu nhiên độc lập $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, một đặc trưng số của biến ngẫu nhiên thành phần X_i có tính cộng tính thường được sử dụng là kỳ vọng $\mathbb{E}(X_i)$. Rõ ràng, $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$, ngay cả trong trường hợp các biến ngẫu nhiên $X_i, i = 1, 2, \ldots$ không độc lập. Rất tiếc, kỳ vọng của biến ngẫu nhiên không phải bao giờ cũng tồn tại, ví dụ quen thuộc là kỳ vọng không tồn tại đối với biến ngẫu nhiên thuộc phân phối Cauchy. Vì vậy, rất tự nhiên khi nêu ra câu hỏi là có tồn tại hay không các đặc trưng khác của biến ngẫu nhiên cho phép sử dụng các tính chất ưu việt của kỳ vọng và đồng thời cũng khắc phục được sự không tồn tại của kỳ vọng đối với một số phân phối xác suất. Với mục đích đó, năm 1986 V. M. Zolotarev lần đầu tiên sử dụng khái niệm tâm của biến ngẫu nhiên trong nghiên cứu lý thuyết các định lý giới hạn của tổng các đại lượng ngẫu nhiên độc lập (xem chi tiết trong [54]). Sau đó, khoảng những năm 1990 hai giáo sư của Trường đại học Tổng hợp Quốc gia Lomonoxov (Liên bang Nga) là V. M. Kruglov và V. Y. Korolov cũng đã sử dụng khái niệm này trong nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập (xem [33]). Từ những năm đó cho tới nay, hầu như rất ít các tài liệu đề cập tới tâm của biến ngẫu nhiên. Tuy nhiên, là một trong những đặc trưng của biến ngẫu nhiên, tâm cũng đóng vai trò quan trọng trong việc xác định phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên. Đó cũng là lý do để chúng tôi đặt vấn đề nghiên cứu tính chất và các ứng dụng của tâm của biến ngẫu nhiên trong Lý thuyết các định lý giới hạn.

Kết quả chính của phần này là các tính toán cụ thể liên quan tới tâm của một số lớp phân phối xác suất quen thuộc và khảo sát thêm một số tính chất của tâm của biến ngẫu nhiên (ngoài các tính chất đã được V.M. Zolotarev, V. M. Kruglov và V. Y. Korolev đưa ra trong các tài liệu [33] và [54]). Việc tìm các ứng dụng của đặc trưng mới này trong lý thuyết các định lý giới hạn cũng được xét tới trong các bài báo tiếp theo.

Chúng ta nhắc lại định nghĩa tâm của biến ngẫu nhiên do V.M. Zolotarev đưa ra đầu tiên, sau đó được V. M. Kruglov và V. Y. Korolov sử dụng trong cuốn sách "Các định lý giới hạn của tổng ngẫu nhiên" (xem chi tiết trong [33] và [54]). Giả sử biến ngẫu nhiên X có hàm phân phối $F_X(x) = P(X < x)$ và hàm đặc trưng $f_X(t) = \mathbb{E}(\exp(itX))$. Giả sử $v \in (0, +\infty)$, thỏa mãn $f(v) \neq 0$. Tâm của biến ngẫu nhiên X (hay của phân phối F) tại v (còn được gọi là v-tâm của biến ngẫu nhiên), là đại lượng

$$c(v, X) = c(v, F) = v^{-1}.\Im[\ln f_X(v)],$$

trong đó $\Im(z)$ là phần ảo của số phức z.

Chúng ta cũng cần nhắc lại một số tính chất quan trọng của tâm $c(v, X)$ đã được xét bởi V. M. Zolotarev, V. M. Kruglov và V. Y. Korolev (xem các chứng minh chi tiết trong [33] và [54]).

Định lý 3.6.1. *(a) Giả sử X là một biến ngẫu nhiên bất kỳ, có tồn tại v-tâm. Khi đó,*

$$c(v, -X) = -c(v, X).$$

(b) Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, với dãy các v-tâm tương ứng. Khi đó,

$$c(v, \sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} c(v, X_k).$$

(c) Giả sử dãy $\{X_n, n \geq 1\}$ hội tụ yếu đến biến ngẫu nhiên X có hàm đặc trưng $f_X(v) \neq 0$ tại $v > 0$ nào đó khi $n \to +\infty$. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} c(v, X_n) = c(v, X).$$

2. **Các kết quả chính**

Định lý 3.6.2. *Giả sử X là biến ngẫu nhiên của một lớp phân phối xác suất. Khi đó, $\forall\ v > 0$, ta có*

(a) Nếu $P(X = a) = 1$, thì $c(v, X) = a$.

(b) Nếu $X \sim U(n)$, thì $c(v, X) = \dfrac{n+1}{2}$.

(c) Nếu $X \sim U[a, b]$, thì $c(v, X) = \dfrac{a+b}{2}$.

(d) Nếu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, thì $c(v, X) = \mu$.

Nhận xét 3.6.1. *Định lý 3.6.2 cho thấy tâm của một số phân phối bằng giá trị kỳ vọng của phân phối đó.*

Định lý 3.6.3. *Giả sử X là biến ngẫu nhiên của một lớp phân phối xác suất. Khi đó, $\forall\ v > 0$, ta có*

(a) Nếu $X \sim P(\lambda)$, thì $c(v, X) = \lambda.v^{-1}.\sin v$

(b) Nếu $X \sim Bernoulli(p)$, thì $c(v, X) = v^{-1}.\arcsin\left(\dfrac{p\sin v}{\sqrt{1-2pq(1-\cos v)}}\right)$, $p + q = 1$.

(c) Nếu $X \sim B(n, p)$, thì $c(v, X) = n.v^{-1}.\arcsin\left(\dfrac{p\sin v}{\sqrt{1-2pq(1-\cos v)}}\right)$, $p + q = 1$.

(d) Nếu $X \sim Geometry(p)$, thì $c(v, X) = v^{-1}.\arcsin\left(\dfrac{\sin v}{\sqrt{1+q^2-2q\cos v}}\right)$, $p+q = 1$.

(e) *Nếu* $X \sim Cauchy(c)$, *thì* $c(v, X) = 0$.

(f) *Nếu* $X \sim Exp(\lambda)$, *thì* $c(v, X) = v^{-1}.\arcsin\left(\dfrac{v}{\sqrt{\lambda^2 + v^2}}\right)$.

(g) *Nếu* $X \sim \chi^2(n)$, *thì* $c(v, X) = \dfrac{1}{2}n.v^{-1}.\arcsin\left(\dfrac{2v}{\sqrt{1 + 4v^2}}\right)$.

(h) *Nếu* $X \sim Gamma(\alpha, p)$, *thì* $c(v, X) = p.v^{-1}.\arcsin\left(\dfrac{v}{\sqrt{\alpha^2 + v^2}}\right)$.

Nhận xét 3.6.2. *Trong Định lý* 3.6.3 *chúng ta thấy v-tâm không bằng giá trị kỳ vọng của phân phối đó. Đặc biệt, mục 5) cho thấy phân phối Cauchy không tồn tại kỳ vọng, nhưng lại có v-tâm.*

Định lý 3.6.4. *Giả sử biến ngẫu nhiên* X *có tâm* $c(v, X)$ *và tồn tại kỳ vọng* $\mathbb{E}(X)$. *Khi đó, nếu hàm đặc trưng của* X *khả vi trên* $\mathbb{R}^+$, *thì* $\lim\limits_{v \to 0^+} c(v, X) = \mathbb{E}(X)$.

Nhận xét 3.6.3. *Nói chung,* $c(v, aX) \neq ac(v, X)$, *với* $a \in \mathbb{R}$. *Nhưng* $\lim\limits_{v \to 0^+} c(v, aX) = a \lim\limits_{v \to 0^+} c(v, X)$.

Định lý 3.6.5. *Giả sử* $\{X_n, n \geq 1\}$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối với tâm* $c(v, X_n)$. *Khi đó, nếu* N *là một biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương, độc lập với mỗi* X_k *và đại lượng* $S_N = \sum\limits_{k=1}^{N} X_k$ *có hàm đặc trưng* $f(v) \neq 0$ *tại* $v > 0$ *nào đó, thì*

$$\lim_{v \to 0^+} c(v, S_N) = \mathbb{E}(N).\mathbb{E}(\xi_k).$$

Lưu ý, trường hợp $N \sim P(\lambda)$, *thì* $c(v, S_N) = \lambda.c(v, X_k)$.

Định lý 3.6.6. *Giả sử biến ngẫu nhiên* X *có tâm* $c(v, X)$ *và tồn tại kỳ vọng* $\mathbb{E}(X)$. *Khi đó,*

(a) $c(v, X) \leq \mathbb{E}(X)$.

(b) *Nếu hàm mật độ của* X *đối xứng qua đường thẳng* $x = a$, *thì* $c(v, X) = a = \mathbb{E}(X)$.

Nhận xét 3.6.4. *Từ Định lý* 3.6.6, *suy ra rằng kết quả của Định lý* 3.6.5 *là hiển nhiên.*

Chương 4

Một số ứng dụng trong thống kê và mô phỏng Monte Carlo

4.1 Hàm phân phối xác suất dạng khi bình phương với chỉ số ngẫu nhiên

1. **Đặt vấn đề**. Giả sử $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là n biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối chuẩn chính tắc $\mathcal{N}(0,1)$. Khi đó tổng các bình phương $X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ được gọi là biến ngẫu nhiên có phân phối khi bình phương với n bậc tự do, ký hiệu là χ_n^2.

   Biến ngẫu nhiên χ_n^2 có hàm mật độ xác suất xác định bởi

   $$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \le 0, \\ \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}} & \text{nếu } x > 0 \end{cases}, \tag{4.1.1}$$

   trong đó $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ là hàm Gamma.

   Từ khi xuất hiện (năm 1928), phân phối của biến ngẫu nhiên χ_n^2 (đặc biệt phép thử χ^2)đã đóng vai trò quan trọng trong một số bài toán của thống kê như xây dựng khoảng tin cậy cho phương sai của tổng thể, kiểm định giả thuyết thống kê liên quan tới phương sai tổng thể, kiểm định tính phù hợp giữa thực nghiệm và lý thuyết, kiểm định tính độc lập của các biến ngẫu nhiên...

   Một câu hỏi tự nhiên là nếu độ tự do n của biến ngẫu nhiên χ_n^2 được thay bởi một biến ngẫu nhiên N, nhận các giá trị nguyên dương, thì điều gì sẽ xảy ra với các kết quả liên quan tới biến ngẫu nhiên dạng χ_N^2.

2. **Kết quả**. Ký hiệu Z là một biến ngẫu nhiên suy biến tại 1. Chúng ta cũng sử dụng ký hiệu $\xrightarrow{d}$ là sự hội tụ theo phân phối, còn $\xrightarrow{P}$ là sự hội tụ theo xác suất.

Định lý 4.1.1. *Giả sử $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là n biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối χ^2_n. Giả sử rằng N là một biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương và N độc lập với mỗi $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Xét tổng ngẫu nhiên $S_N := \sum_{i=1}^{N} X_i$. Khi đó*

$$\frac{S_N}{n} \xrightarrow{d} N, \quad n \to \infty.$$

Dưới đây là một số kết quả thú vị liên quan đến biến ngẫu nhiên χ^2_n khi thay bậc tự do n bằng một biến ngẫu nhiên N nhận giá trị nguyên dương, độc lập với các $X_i \sim \mathcal{N}(0,1), i = 1, 2, \ldots, N$, mà ta sẽ ký hiệu là χ^2_N, nghĩa là $\chi^2_N = X_1^2 + \cdots + X_N^2$.

Định lý 4.1.2. *Giả sử $\{N_n, n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên, dương, độc lập với các $X_i \sim \mathcal{N}(0,1), i = 1, 2, \ldots$ và thỏa các điều kiện*

$$E(N_n) \to \infty; \quad \frac{E|N_n - E(N_n)|}{E(N_n)} \to 0 \quad khi \quad n \to \infty.$$

Khi đó

$$\frac{\chi^2_{N_n}}{E(N_n)} \xrightarrow{d} Z, \quad n \to \infty.$$

Chú ý 4.1.1. *Ta có $E(\chi^2(1)) = 1$. Do đó, $E(N_n) = E(\chi^2_{N_n})$. Khi đó kết luận trong Định lý* 3.6.6 *có thể phát biểu như sau*

$$\frac{\chi^2_{N_n}}{E(\chi^2_{N_n})} \xrightarrow{d} Z, \quad n \to \infty.$$

Các kết quả sau là những hệ quả trực tiếp từ Định lý 4.1.2.

Hệ quả 4.1.1. *Giả sử $N_n \sim Binomial(n, p)$. Khi đó*

$$\frac{\chi^2_{N_n}}{np} \xrightarrow{d} Z, \quad n \to \infty.$$

Hệ quả 4.1.2. *Giả sử $N_n \sim Poisson(\lambda_n)$ và $\lambda_n \to \infty$ khi $n \to \infty$. Khi đó*

$$\frac{\chi^2_{N_n}}{\lambda_n} \xrightarrow{d} Z, \quad n \to \infty.$$

Định lý 4.1.3. *Giả sử $N_n \sim Uniform_n$. Khi đó*

$$\frac{\chi^2_{N_n}}{n} \xrightarrow{d} U \sim Uniform[0,1], \quad n \to \infty.$$

Định lý 4.1.4. *Giả sử $N_n \sim Geometry(p_n)$ và $p_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Khi đó*

$$p_n.\chi^2_{N_n} \xrightarrow{d} Y \sim Exp(1), \quad n \to \infty.$$

Định lý 4.1.5. *Giả sử $\{N_n, n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương, độc lập với mọi $X_i \sim \mathcal{N}(0,1), i \geq 1$. Khi đó, nếu*

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{P} 1,$$

thì

$$\frac{\chi^2_{N_n}}{n} \xrightarrow{d} Z, \quad n \to \infty.$$

3. **Thuật toán tính hàm phân phối khi bình phương χ^2 với bậc tự do ngẫu nhiên**. Trong phần này, sử dụng kết quả của Lebedev trong [34], chúng tôi xây dựng thuật toán để tính các giá trị của hàm phân phối chi bình phương với độ tự do ngẫu nhiên $\chi^2_N(x)$, trong đó biến ngẫu nhiên N có các phân phối xác suất xác định như phân phối Poisson hoặc hình học.

Định lý 4.1.6. *(Định lý Lebedev, [34]) Ký hiệu $\chi^2_n(x)$ là hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên χ^2 với n bậc tự do. Khi đó với mọi n=1,2,..*

$$\chi^2_{n+2}(x) = \chi^2_n(x) - \delta_n \frac{x^{n/2}}{n!!} e^{-x/2}, \chi^2_1(x) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1, \chi^2_2(x) = 1 - e^{-x/2},$$

ở đây

$$\delta_x = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}, & n = 2k+1, \end{cases}$$

và

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} x^{-t/2} dt.$$

Hệ quả 4.1.3. *Nếu n=2m, m=1,2,... thì*

$$\chi^2_{2m}(x) = 1 - e^{-x/2} \sum_{p=0}^{m-1} \frac{x/2^p}{p!}.$$

Nếu n=2m+1, m=0,1,2,...thì

$$\chi^2_{2m+1}(x) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x/2} \sum_{p=1}^{m} \frac{x^{p-1/2}}{(2p-1)!!}.$$

Định lý 4.1.7. *Giả sử $N(\lambda)$ là biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên, không âm, tham số λ với phân phối xác suất $P(N = k) = p_k(\lambda)$. Giả sử $N(\lambda)$ độc lập với mọi $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, i=1,2...*
Đặt $\chi^2_n = \sum_{i=1}^n {X_i}^2; \chi^2_N = \sum_{i=1}^N {X_i}^2, X_i \sim \mathcal{N}(0,1), i = 1, 2....$ Ký hiệu $\chi^2_n(x)$ và

$F_N(x,\lambda)$ lần lượt là hàm phân phối xác suất của các biến ngẫu nhiên χ^2_n và χ^2_N. Khi đó

$$F_N(x,\lambda) = \sum_1^\infty \chi^2_k(x) p_k(\lambda).$$

4. **Thuật toán tính hàm phân phối xác suất $\chi^2_N(x)$ với bậc tự do ngẫu nhiên**.
   (a) Xây dựng hàm phân phối xác suất $\chi^2_n(x) := P(\chi^2_n < x)$ của biến ngẫu nhiên có phân phối khi bình phương với n bậc tự do χ^2_n dựa vào kết quả của Hệ quả 3.2.
   (b) Tính $P(N=k) = p_k(\lambda), k = 1, 2, ..$ của biến ngẫu nhiên rời rạc N.
   (c) Tính hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên χ^2_N với bậc tự do là một biến ngẫu nhiên N

$$F_N(x,\lambda) = \sum_1^\infty \chi^2_k(x) p_k(\lambda).$$

5. **Khi bình phương với chỉ số ngẫu nhiên nhị thức âm**. Xét tổng ngẫu nhiên

$$\chi^2(N) = \sum_{k=1}^N X_k^2$$

với $X_1, X_2, ..., X_k, ...$ là các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối chuẩn tắc $N(0,1)$ và N là biến ngẫu nhiên có phân phối nhị thức âm, tức là:

$$P(N=k) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r} \qquad (p+q=1, k=r, r+1, ...)$$

Xét chuỗi lũy thừa

$$\varphi(x) = \sum_{k=r}^\infty C_{k-1}^{r-1} \frac{x^n}{\Gamma(\frac{k}{2})}$$

có miền hội tụ là $\mathbb{R}$. Gọi $f_k(x)$ là hàm mật độ của phân phối χ^2 với k bậc tự do. Khi đó, tổng ngẫu nhiên $\chi^2(N)$ có hàm mật độ ($x \geq 0$):

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=r}^\infty f_k(x) P(N=k) = \sum_{k=r}^\infty \frac{x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2})} C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r} \\ &= x^{-1} e^{-\frac{x}{2}} (p/q)^r \sum_{k=r}^\infty C_{k-1}^{r-1} \frac{\left[q\sqrt{x/2}\right]^k}{\Gamma(\frac{k}{2})} = x^{-1} e^{-\frac{x}{2}} (p/q)^r \varphi(q\sqrt{x/2}) \end{aligned}$$

Do đó, ta cần tính toán chuỗi lũy thừa $\varphi(x)$. Xét dãy chuỗi hàm sau:

$$\phi_n(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{k^n x^k}{\Gamma(\frac{k}{2})} \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

có các tính chất sau:

i. $\phi_0(x) = \frac{x}{\sqrt{\pi}} + 2x^2 e^{x^2}\Phi(x\sqrt{2})$ với $\Phi(x)$ là hàm Laplace.

ii. $\phi_{n+1}(x) = x\frac{\partial}{\partial x}\phi_n(x)$.

Dựa vào 2 tính chất trên và dùng các phần mềm tính toán Maple ta có thể tính tường minh chuỗi hàm $\phi_n(x)$. Chẳng hạn:

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \frac{x(1+2x^2)}{\sqrt{\pi}} + 4x^2(1+x^2)e^{x^2}\Phi(x\sqrt{2}),\\
\phi_2(x) &= \frac{x(1+10x^2+4x^4)}{\sqrt{\pi}} + 8x^2(1+3x^2+x^4)e^{x^2}\Phi(x\sqrt{2}),\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Khi đó, với $r = 1$ thì $\varphi(x) = \phi_0(x)$. Với $r \geq 2$ thì

$$\varphi(x) = \frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=r}^{\infty}(k-r+1)(k-r+2)...(k-1)\frac{x^k}{\Gamma(\frac{k}{2})}$$

Ta có thể biểu diễn $\varphi(x)$ qua các chuỗi hàm $\phi_n(x)$. Chẳng hạn:

$$\begin{aligned}
&r = 2, && \varphi(x) = \phi_1(x) - \phi_0(x)\\
&r = 3, && \varphi(x) = \frac{1}{2!}[\phi_2(x) - 3\phi_1(x) + 2\phi_0(x)]\\
&r = 4, && \varphi(x) = \frac{1}{3!}[\phi_3(x) - 6\phi_2(x) + 11\phi_1(x) - 6\phi_0(x)]\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Các bảng bên cho giá trị hàm phân phối $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ trong các trường hợp cụ thể.

Bảng giá trị hàm phân phối Khi bình phương với chỉ số nhị thức âm (r=1,p=1/3)

Hàm mật độ có dạng

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leq 0 \\ pqe^{-x(1-q^2)/2}\Phi(q\sqrt{x}) + \frac{pe^{-x/2}}{\sqrt{2\pi x}} & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	0	0.0949	0.1401	0.1768	0.2089	0.2379	0.2647	0.2897	0.3132	0.3355
1.	0.3566	0.3768	0.3961	0.4146	0.4324	0.4494	0.4659	0.4817	0.4970	0.5117
2.	0.5260	0.5397	0.5531	0.5660	0.5784	0.5905	0.6022	0.6135	0.6245	0.6352
3.	0.6455	0.6555	0.6652	0.6747	0.6838	0.6927	0.7013	0.7097	0.7178	0.7257
4.	0.7334	0.7408	0.7480	0.7550	0.7619	0.7685	0.7749	0.7812	0.7872	0.7931
5.	0.7989	0.8045	0.8099	0.8151	0.8202	0.8252	0.8300	0.8347	0.8393	0.8437
6.	0.8481	0.8523	0.8563	0.8603	0.8641	0.8679	0.8715	0.8751	0.8785	0.8819
7.	0.8851	0.8883	0.8913	0.8943	0.8972	0.9001	0.9028	0.9055	0.9081	0.9106
8.	0.9131	0.9155	0.9178	0.9200	0.9222	0.9244	0.9265	0.9285	0.9304	0.9323
9.	0.9342	0.9360	0.9378	0.9395	0.9411	0.9428	0.9443	0.9459	0.9473	0.9488
10.	0.9502	0.9516	0.9529	0.9542	0.9554	0.9567	0.9578	0.9590	0.9601	0.9612
11.	0.9623	0.9633	0.9643	0.9653	0.9663	0.9672	0.9681	0.9690	0.9698	0.9706
12.	0.9714	0.9722	0.9730	0.9737	0.9744	0.9751	0.9758	0.9765	0.9771	0.9778
13.	0.9784	0.9790	0.9795	0.9801	0.9806	0.9812	0.9817	0.9822	0.9827	0.9832
14.	0.9836	0.9841	0.9845	0.9849	0.9853	0.9857	0.9861	0.9865	0.9869	0.9872
15.	0.9876	0.9879	0.9883	0.9886	0.9889	0.9892	0.9895	0.9898	0.9901	0.9903
16.	0.9906	0.9909	0.9911	0.9914	0.9916	0.9918	0.9920	0.9923	0.9925	0.9927
17.	0.9929	0.9931	0.9933	0.9935	0.9936	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945
18.	0.9946	0.9948	0.9949	0.9950	0.9952	0.9953	0.9954	0.9956	0.9957	0.9958
19.	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968
20.	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9972	0.9973	0.9974	0.9975	0.9975	0.9976
21.	0.9977	0.9977	0.9978	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981	0.9981	0.9982
22.	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
23.	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990
24.	0.9990	0.9990	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992
25.	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993	0.9993	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994
26.	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995
27.	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
28.	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997
29.	0.9997	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Bảng giá trị hàm phân phối Khi bình phương với chỉ số nhị thức âm (r=2,p=1/3)

Hàm mật độ có dạng

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leq 0 \\ p^2 e^{-x(1-q^2)/2} \Phi(q\sqrt{x})(1+q^2x) + \frac{p^2 q\sqrt{x} e^{-x/2}}{\sqrt{2\pi}} & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	0	0.0068	0.0147	0.0233	0.0324	0.0419	0.0517	0.0618	0.0722	0.0829
1.	0.0937	0.1046	0.1157	0.1269	0.1382	0.1495	0.1609	0.1724	0.1839	0.1954
2.	0.2069	0.2184	0.2298	0.2413	0.2527	0.2641	0.2754	0.2866	0.2978	0.3090
3.	0.3200	0.3310	0.3419	0.3527	0.3634	0.3740	0.3845	0.3949	0.4052	0.4154
4.	0.4255	0.4355	0.4453	0.4551	0.4647	0.4742	0.4836	0.4929	0.5021	0.5111
5.	0.5200	0.5289	0.5375	0.5461	0.5545	0.5629	0.5710	0.5791	0.5871	0.5949
6.	0.6026	0.6103	0.6177	0.6251	0.6324	0.6395	0.6465	0.6534	0.6602	0.6669
7.	0.6735	0.6799	0.6863	0.6925	0.6987	0.7047	0.7106	0.7165	0.7222	0.7278
8.	0.7333	0.7388	0.7441	0.7493	0.7545	0.7595	0.7645	0.7693	0.7741	0.7788
9.	0.7834	0.7879	0.7923	0.7967	0.8009	0.8051	0.8092	0.8132	0.8172	0.8211
10.	0.8248	0.8286	0.8322	0.8358	0.8393	0.8427	0.8461	0.8494	0.8527	0.8558
11.	0.8589	0.8620	0.8650	0.8679	0.8708	0.8736	0.8763	0.8790	0.8817	0.8843
12.	0.8868	0.8893	0.8917	0.8941	0.8964	0.8987	0.9010	0.9032	0.9053	0.9074
13.	0.9095	0.9115	0.9134	0.9154	0.9173	0.9191	0.9209	0.9227	0.9244	0.9261
14.	0.9278	0.9294	0.9310	0.9325	0.9341	0.9356	0.9370	0.9384	0.9398	0.9412
15.	0.9425	0.9438	0.9451	0.9464	0.9476	0.9488	0.9500	0.9511	0.9522	0.9533
16.	0.9544	0.9554	0.9565	0.9575	0.9584	0.9594	0.9603	0.9612	0.9621	0.9630
17.	0.9639	0.9647	0.9655	0.9663	0.9671	0.9679	0.9686	0.9693	0.9701	0.9708
18.	0.9714	0.9721	0.9727	0.9734	0.9740	0.9746	0.9752	0.9758	0.9764	0.9769
19.	0.9775	0.9780	0.9785	0.9790	0.9795	0.9800	0.9805	0.9809	0.9814	0.9818
20.	0.9822	0.9827	0.9831	0.9835	0.9839	0.9842	0.9846	0.9850	0.9853	0.9857
21.	0.9860	0.9864	0.9867	0.9870	0.9873	0.9876	0.9879	0.9882	0.9885	0.9887
22.	0.9890	0.9893	0.9895	0.9898	0.9900	0.9903	0.9905	0.9907	0.9910	0.9912
23.	0.9914	0.9916	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9927	0.9929	0.9931
24.	0.9932	0.9934	0.9936	0.9937	0.9939	0.9940	0.9942	0.9943	0.9944	0.9946
25.	0.9947	0.9948	0.9950	0.9951	0.9952	0.9953	0.9954	0.9955	0.9957	0.9958
26.	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9963	0.9964	0.9965	0.9966	0.9967
27.	0.9968	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974	0.9974
28.	0.9975	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980
29.	0.9980	0.9981	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984

Bảng giá trị hàm phân phối Khi bình phương với chỉ số nhị thức âm (r=3,p=1/3)

Hàm mật độ có dạng

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} q p^3 e^{-x(1-q^2)/2} \Phi(q\sqrt{x})(3 + q^2 x) + \frac{p^3 \sqrt{x} e^{-x/2}(2+q^2 x)}{2\sqrt{2\pi}} & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	0	0.0004	0.0013	0.0025	0.0041	0.0061	0.0083	0.0108	0.0137	0.0168
1.	0.0201	0.0238	0.0277	0.0318	0.0361	0.0407	0.0455	0.0505	0.0557	0.0611
2.	0.0667	0.0724	0.0784	0.0844	0.0907	0.0971	0.1036	0.1102	0.1170	0.1239
3.	0.1309	0.1380	0.1452	0.1525	0.1599	0.1674	0.1749	0.1826	0.1902	0.1980
4.	0.2058	0.2136	0.2215	0.2294	0.2374	0.2453	0.2533	0.2614	0.2694	0.2775
5.	0.2855	0.2936	0.3016	0.3097	0.3178	0.3258	0.3338	0.3419	0.3499	0.3578
6.	0.3658	0.3737	0.3816	0.3895	0.3973	0.4051	0.4129	0.4206	0.4283	0.4359
7.	0.4435	0.4510	0.4585	0.4660	0.4734	0.4807	0.4880	0.4952	0.5024	0.5095
8.	0.5165	0.5235	0.5305	0.5373	0.5441	0.5509	0.5576	0.5642	0.5707	0.5772
9.	0.5836	0.5900	0.5963	0.6025	0.6086	0.6147	0.6207	0.6267	0.6326	0.6384
10.	0.6441	0.6498	0.6554	0.6610	0.6665	0.6719	0.6772	0.6825	0.6877	0.6929
11.	0.6979	0.7030	0.7079	0.7128	0.7176	0.7224	0.7270	0.7317	0.7362	0.7407
12.	0.7452	0.7495	0.7539	0.7581	0.7623	0.7664	0.7705	0.7745	0.7785	0.7824
13.	0.7862	0.7900	0.7937	0.7974	0.8010	0.8045	0.8080	0.8115	0.8149	0.8182
14.	0.8215	0.8247	0.8279	0.8310	0.8341	0.8372	0.8402	0.8431	0.8460	0.8488
15.	0.8516	0.8544	0.8571	0.8598	0.8624	0.8649	0.8675	0.8700	0.8724	0.8748
16.	0.8772	0.8795	0.8818	0.8840	0.8863	0.8884	0.8906	0.8927	0.8947	0.8967
17.	0.8987	0.9007	0.9026	0.9045	0.9063	0.9082	0.9099	0.9117	0.9134	0.9151
18.	0.9168	0.9184	0.9200	0.9216	0.9231	0.9246	0.9261	0.9276	0.9290	0.9304
19.	0.9318	0.9332	0.9345	0.9358	0.9371	0.9384	0.9396	0.9408	0.9420	0.9432
20.	0.9443	0.9454	0.9465	0.9476	0.9487	0.9497	0.9507	0.9517	0.9527	0.9537
21.	0.9546	0.9556	0.9565	0.9574	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9624
22.	0.9631	0.9639	0.9647	0.9654	0.9661	0.9668	0.9675	0.9682	0.9688	0.9695
23.	0.9701	0.9708	0.9714	0.9720	0.9726	0.9731	0.9737	0.9742	0.9748	0.9753
24.	0.9758	0.9764	0.9769	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9792	0.9796	0.9801
25.	0.9805	0.9809	0.9813	0.9817	0.9821	0.9825	0.9829	0.9832	0.9836	0.9839
26.	0.9843	0.9846	0.9850	0.9853	0.9856	0.9859	0.9862	0.9865	0.9868	0.9871
27.	0.9874	0.9876	0.9879	0.9882	0.9884	0.9887	0.9889	0.9892	0.9894	0.9896
28.	0.9899	0.9901	0.9903	0.9905	0.9907	0.9909	0.9911	0.9913	0.9915	0.9917
29.	0.9919	0.9921	0.9922	0.9924	0.9926	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934
30.	0.9935	0.9936	0.9938	0.9939	0.9941	0.9942	0.9943	0.9944	0.9946	0.9947
31.	0.9948	0.9949	0.9950	0.9951	0.9953	0.9954	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958
32.	0.9959	0.9960	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964	0.9965	0.9965	0.9966
33.	0.9967	0.9968	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9971	0.9972	0.9972	0.9973
34.	0.9974	0.9974	0.9975	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9978	0.9979

4.2 Một số bài toán ước lượng tham số tổng thể qua các ước tử là tổng ngẫu nhiên

1. **Đặt vấn đề** Phương pháp Monte Carlo (còn được gọi là các phép thử mẫu ngẫu nhiên) là một công cụ số trong phân tích các hệ thống ngẫu nhiên. Điều đặc biệt là việc sử dụng các số ngẫu nhiên để tính toán các số không ngẫu nhiên. Ví dụ, giả sử X là một biến ngẫu nhiên, với kỳ vọng $\mu = E(X)$. Mục đích của chúng ta là tính μ. Giả sử chúng ta có thể tạo ra n quan sát ngẫu nhiên từ X, ký hiệu $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Theo Luật yếu các số lớn nếu, $E|X_1| < \infty$,

$$\alpha(n) \xrightarrow{\text{P}} \mu, \quad khi \quad n \to +\infty, \tag{4.2.2}$$

ở đây $\alpha(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ and $\xrightarrow{P}$ là sự hội tụ theo xác suất. Chúng ta có thể có xấp xỉ, nếu n đủ lớn

$$\mu \simeq \alpha(n). \tag{4.2.3}$$

Như vậy, chúng ta có thể bảo đảm rằng nếu chọn n đủ lớn thì , $\alpha(n)$ sẽ gần tới μ. Diều này có được nhờ Luật yếu các số lớn. Chú ý rằng X_k và $\alpha(n)$ là ngẫu nhiên trong khi μ lại không ngẫu nhiên. Chúng ta gọi thống kê $\alpha(n)$ là một ước tử vững của μ.

Bên cạnh đó, Định lý giới hạn trung tâm cho phép xác định tốc độ hội tụ trong phương pháp Monte Carlo. Cụ thể, khi $n \to +\infty$, phân phối của $\frac{\alpha(n)-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$ dần tới phân phối chuẩn chính tắc $N(0,1)$. Như vậy, tốc độ hội tụ có dạng $O(n^{-1/2})$.

Ngoài ra, Định lý giới hạn trung tâm cũng cho phép xây dựng khoảng tin cậy, cụ thể với $\delta \in (0,1)$, có $z_{\frac{\delta}{2}}$ sao cho $P(Z > z_{\frac{\delta}{2}}) = \frac{\delta}{2}$, ở đây, Z là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩnchinhs tắc. Như vậy, với n đủ lớn

$$P(|\ \alpha(n) - \mu\ | > z_{\frac{\delta}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \simeq \delta \tag{4.2.4}$$

suy ra rằng giá trị chưa biết μ nằm trong khoảng $\alpha(n) \pm z_{\frac{\delta}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ với xác suất $1-\delta$. Như vậy, với n đủ lớn khoảng $\alpha(n) \pm z_{\frac{\delta}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ là khoảng tin cậy $100(1-\delta)\%$ cho trung bình μ.

It should be noted that in practice the normal Chú ý là trong thực tế, khi độ lệch tiêu chuẩn σ chưa xác định, chugs ta có thể sử dụng ước lượng

$$s_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \alpha_n)^2}. \tag{4.2.5}$$

Khi đó, khoảng tin cậy

$$\left[\alpha(n) - z_{\frac{\delta}{2}}\frac{s_n}{\sqrt{n}}, \alpha(n) + z_{\frac{\delta}{2}}\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right] \tag{4.2.6}$$

là $100(1-\delta)\%$ khoảng tin cậy cho trung bình $\mu = E(X)$.

Có ý nghĩa nếu ta xét trường hợp số các phép thử thống kê được thay bởi các biến ngẫu nhiên N_n. Khi đó hai thống kê

$$\alpha_1(N_n) = \frac{1}{E(N_n)}\sum_{i=1}^{N_n} X_i \tag{4.2.7}$$

và

$$\alpha_2(N_n) = \frac{1}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n} X_i \tag{4.2.8}$$

sẽ được sử dụng để đánh giá trung bình μ.

Kết quả chính của phần này là xây dựng các ước lượng điểm và khoảng tin cậy cho trung bình μ, trên cơ sở các ước tử tổng ngẫu nhiên với số phép thử N_n có phân phối Bernoulli. Các kết quả nhận được là sự mở rộng các kết quả của [12], [48]. Chú ý rằng trong [48] thống kê $\alpha_2(N_n)$ được xét trong trường hợp N_n có phân phối siêu hình học.

2. Các kết quả chính

Xét số người vào siêu thị. Một số từ họ mua hàng, số khác không mua, đơn giản vào ngắm nhìn. Giả sử số người không mua hàng là lớn. Ký hiệu X là tổng số tiền thu vào của siêu thị. X là một biến ngẫu nhiên, có giá trị trong $[0, +\infty)$ và ta cần tính trung bình $E(X)$ với $p = P(X > 0)$ và $X > 0$ a.s. Khi mô hình hóa bài toán này, giả sử $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối sinh bởi n quan sát độc lập từ biến X và $\mu = E(X_1), 0 < \sigma^2 = D(X_1)$. Ký hiệu N_n là một số các quan sát nhân giá trị nguyên dương. Dễ thất rằng N_n có phân phối nhị thức $B(n,p)$. Khi đó, với $X_i > 0$, đặt $Y_i = X_i$ và chúng ta có thể xắp xếp lại thứ tự sao cho $X_i > 0, i = 1, 2, \ldots, N_n$. Như vậy, chúng ta có thể nhận được dãy các biến ngẫu nhiên độc lập $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N_n}$ có cùng phân phối như X khi $X > 0$ với trung bình μ_Y và phương sai σ_Y^2.

Quan hệ giữa các mô men của các biến ngẫu nhiên X_i và Y_i được xét như sau.

Định lý 4.2.1. *Với các giả thiết của X_i và Y_i,*

(a) $\mu = p\mu_Y$,

(b) $\sigma^2 = p(\sigma_Y^2 + q\mu_Y^2), \quad (p + q = 1).$

Xét hai ước tử

$$\alpha_{Y,1}(N_n) = \frac{S_{N_n}}{E(N_n)} = \frac{S_{N_n}}{np}; \qquad \alpha_{Y,2}(N_n) = \frac{S_{N_n}}{N_n}. \tag{4.2.9}$$

Chú ý rằng, nếu N_n suy thoái tại n, tức là $P(N_n = n) = 1$, thì hai ước tử $\alpha_{Y,1}(N_n), \alpha_{Y,2}(N_n)$ trở về dạng ước tử quen thuộc $\alpha(n)$.

It has long been known that the Theo định lý Khinchin $\alpha(n)$ là ước lượng vững cho μ, tức là $E[\alpha(n)] = \mu$ và $\alpha(n) \xrightarrow{\text{P}} \mu$, khi $n \to +\infty$. Tương ứng hai thống kê mới, chúng ta có kết qua sau.

Bổ đề 4.2.1. *Với các giả thiết cho N_n, chúng ta có*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P(N_n = k)}{k} \to 0,$$

khi $n \to \infty$.

Định lý 4.2.2. *Xét hai thống kê trong (4.2.9). Khi đó,*

(a) $\alpha_{Y,1}(N_n)$ *là ước lượng vững cho* μ_Y.

(b) $\alpha_{Y,2}(N_n)$ *là ước lượng tiệm cận vững cho μ_Y, sao cho $E[\alpha_{Y,2}(N_n)]$ dần tới μ_Y và $D[\alpha_{Y,2}(N_n)]$ dần tới 0, khi $n \to \infty$.*

Để xây dựng khoảng tin cậy cho μ_Y trên cơ sở hai ước tử đang xét, chúng ta cần tới kết quả của Định lý giới hạn trung tâm cho tổng ngẫu nhiên với chỉ số của tổng là biến ngẫu nhiên có phân phối nhị thức

Định lý 4.2.3.

$$\frac{S_{N_n} - E(S_{N_n})}{\sqrt{Var(S_{N_n})}} \to \mathcal{N}(0,1) \textit{ in distribution as } n \to \infty. \tag{4.2.10}$$

Định lý này là trường hợp riêng của Định lý H. Robbins ([42]) và chứng minh chi tiết có thể xem trong [15].

Hệ quả 4.2.1. *Với các ước tử xác định trong (4.2.9), khi $n \to \infty$,*

$$\left[\frac{\alpha_{Y,1}(N_n) - \mu_Y}{\sqrt{\sigma_Y^2 + q\mu_Y^2}}\right] \sqrt{np} \longrightarrow N(0,1) \textit{ theo phân phối,} \tag{4.2.11}$$

và

$$\left[\frac{\alpha_{Y,2}(N_n) - \mu_Y}{\sigma_Y \sqrt{np}}\right] N_n \longrightarrow N(0,1) \textit{ theo phân phối.} \tag{4.2.12}$$

Theo (4.2.12) từ Hệ quả 4.2.1, ước tử $\alpha_{Y,2}(N_n)$ là xấp xỉ chuẩn với n đủ lớn, nên khoảng tin cậy cho μ_Y với mức ý nghĩa δ, trên cơ sở ước tử $\alpha_{Y,2}(N_n)$, là

$$\left[\alpha_{Y,2}(N_n) - z_{\frac{\delta}{2}}\frac{\sigma_Y\sqrt{np}}{N_n}; \alpha_{Y,2}(N_n) + z_{\frac{\delta}{2}}\frac{\sigma_Y\sqrt{np}}{N_n}\right]. \tag{4.2.13}$$

ở đây $z_{\frac{\delta}{2}}$ là phân vị chuẩn mức $\frac{\delta}{2}$.

Tuy nhiên, khoảng tin cậy cho μ_Y, trên cơ sở ước tử $\alpha_{Y,1}(N_n)$, từ (**??**) quá phức tạp. Vì vậy, chúng ta có thể thay thế bằng các ước lượng điểm. Từ định lý 4.2.3, tốt nhất chúng ta sử dụng $\alpha_{Y,1}(N_n)$ để đánh giá μ_Y. Tương tự cho σ_Y^2, chúng ta xét ba ước tử sau

$$S_{Y,1}^2 = \frac{1}{E(N_n)-1}\sum_{i=1}^{N_n}[Y_i - \alpha_{Y,1}(N_n)]^2 \tag{4.2.14}$$

$$S_{Y,2}^2 = \frac{1}{E(N_n)-1}\sum_{i=1}^{N_n}[Y_i - \alpha_{Y,2}(N_n)]^2 \tag{4.2.15}$$

$$S_{Y,3}^2 = \frac{1}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n}[Y_i - \alpha_{Y,2}(N_n)]^2 \tag{4.2.16}$$

Chúng ta có kết quả sau.

Định lý 4.2.4. *a)* $E(S_{Y,1}^2) = \sigma_Y^2 + O[n^{-1}]$.

b) $E(S_{Y,2}^2) = \sigma_Y^2 + O[n^{-1}q^n]$.

c) $E(S_{Y,3}^2) = \sigma_Y^2 + O[q^n]$.

Trong Định lý 4.2.4, chú ý rằng các thống kê $S_{Y,1}^2, S_{Y,2}^2, S_{Y,3}^2$ là các ước lượng không chệch của σ_Y^2, nhưng với n đủ lớn và q đủ bé, khi đó các kỳ vọng của chúng sẽ hội tụ tới σ_Y^2 với tốc độ xác định. ở đây, chúng ta sử dụng $S_{Y,2}^2$ cho một ước tử của σ_Y^2 với tốc độ hội tụ $O[n^{-1}q^n]$, là ước tử tốt nhất.

Trong trường hợp chưa xác định σ_Y, khoảng tin cậy theo (4.2.13) với μ_Y, trên cơ sở $\alpha_{Y,2}(N_n)$, được xác định như

$$\left[\alpha_{Y,2}(N_n) - z_{\frac{\delta}{2}}\frac{S_{Y,2}\sqrt{np}}{N_n}; \alpha_{Y,2}(N_n) + z_{\frac{\delta}{2}}\frac{S_{Y,2}\sqrt{np}}{N_n}\right]. \tag{4.2.17}$$

Với lý do tương tự, từ (4.2.17), khoảng tin cậy trên cơ sở $\alpha_{Y,1}(N_n)$ là

$$\left[\alpha_{Y,1}(N_n) - z_{\frac{\delta}{2}}\sqrt{\frac{S_{Y,2}^2 + q\alpha_{Y,1}^2(N_n)}{np}}; \alpha_{Y,1}(N_n) + z_{\frac{\delta}{2}}\sqrt{\frac{S_{Y,2}^2 + q\alpha_{Y,1}^2(N_n)}{np}}\right]. \tag{4.2.18}$$

Trong trường hợp chưa xác định xác suất p có thể sử dụng ước lượng tốt cả p là N_n/n.

Chúng tôi kết thúc phần này, cũng là kết thúc Báo cáo bằng nhận xét với vai trò quan trọng trong lý thuyết cũng như ứng dụng, Lý thuyết các Định lý giới hạn cho tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên tiếp tục nghiên cứu và triển khai các ứng dụng trong Thống kê, Tin học, Toán tài chính, ... Một hướng khác cần xét đối với các biến ngẫu nhiên không độc lập (có tính Markov, Martingales, ...) cần được nghiêm túc nghiên cứu.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Sau 24 tháng thực hiện đề tài, chúng tôi nhận thấy đề tài đã có những đóng góp hiệu quả trong công tác NCKH, đào tạo đại học và sau đại học, tạo điều kiện thuận lợi cho nhiều cán bộ khoa học, giáo viên trẻ và học viên cao học, NCS tham gia nghiên cứu và giải quyết một số vấn đề mà đề tài đặt ra. Chúng tôi có thể mạnh dạn đưa ra những kết luận sau:

Hướng nghiên cứu của đề tài và các kết quả của đề tài là mới (đặc biệt ở Việt Nam) và có nhiều ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau như Lý thuyết xấp xỉ, Thống kê ứng dụng, Tin học, Xác suất tài chính, ... Các kết quả chủ yếu của đề tài được trình bày trong các bài báo trong mục Những đóng góp của đề tài.

1. **Đóng góp của đề tài:**

   (a) Đánh giá tốc độ hội tụ trong Luật yếu số lớn tương tự kết quả của V.V. Petrov trong [39].

   (b) Đánh giá tốc độ hội tụ trong một số định lý giới hạn của các biến ngẫu nhiên độc lập qua khoảng cách xác suất Trotter. Đây là sự phát triển các kết quả của P.L. Butzer trong [1], [2], [3], H. Robbins trong [42], A. Renyi trong [41], Z. Rychlick và Szynal trong [43], [44], ...

   (c) Đánh giá khoảng cách Trotter của hai tổng Abel các biến ngẫu nhiên độc lập, phát triển từ kết quả của M. V. Muchanov trong [37].

   (d) Đánh giá khoảng cách Trotter của hai tổng các biến ngẫu nhiên d chiều độc lập, mở rộng kết quả của Prakasa B. L. S. Rao trong [40] và S. Sakalauskas trong [45].

   (e) Đánh giá khoảng cách Trotter của hai tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên d chiều độc lập. đây là sự ngẫu nhiên hóa các kết quả của Prakasa B. L. S. Rao trong [40] và S. Sakalauskas trong [45] và cũng là sự mở rộng các kết quả trong các trường hợp các biến ngẫu nhiên một chiều của P. L. Butzer, H. Robbins, H.F. Trotter, A. Renyi, W. Feller, ...

2. **Hướng nghiên cứu tiếp tục triển khai:**

   (a) Sử dụng phương pháp khoảng cách xác suất Trotter để tham gia giải bài toán xấp xỉ Weierstrass đối với một hàm liên tục, bị chặn trên đoạn đóng [0,1].

   (b) Sử dụng phương pháp khoảng cách xác suất Trotter trong nghiên cứu tốc độ hội tụ của thuật tóan Quick-sort liên quan tới chỉ số ngẫu nhiên (so sánh với kết quả đã có liên quan tới khoảng cách Zolotarev).

(c) Sử dụng phương pháp khoảng cách xác suất Trotter trong nghiên cứu tốc độ hội tụ trong các định lý giới hạn không sử dụng điều kiện bằng nhau của các mô men (mở rộng kết quả của Z. Rychlik trong [43]).

(d) Xây dựng khoảng cách xác suất Trotter có điều kiện và ứng dụng trong nghiên cứu tốc độ hội tụ trong các định lý giới hạn có điều kiện (mở rộng kết quả của H. Kirschfink trong [30]).

3. **Đề xuất:**

(a) Tạo điều kiện cho nhóm nghiên cứu tiếp tục đăng ký đề tài các cấp để giải quyết dứt điểm các hướng nghiên cứu đặt ra ở trên.

(b) Tăng nguồn kinh phí cho nghiên cứu cấp bộ tương xứng với sự đầu tư về thời gian và trí tuệ của nhóm nghiên cứu.

(c) Nên có chính sách động viên khuyến khích các nhóm nghiên cứu thực hiện tốt đề tài, có nhiều kết quả tốt được công bố trên các tạp chí chuyên môn uy tín và các tạp chí nước ngoài.

LỜI CẢM ƠN

1. Cám ơn Trung tâm Nghiên cứu Châu á (VNU) và Quỹ hỗ trợ Cao học Hàn quốc đã tài trợ kinh phí để thực hiện đề tài.

2. Cám ơn Trường Đại Học Khoa học Huế, Đại học Huế (cơ quan chủ trì), Bộ môn Xác suất Thống kê (Trường Đại học khoa học Huế) và các đồng nghiệp đã tạo điều kiện để đề tài này được hoàn thành đúng thời hạn.

3. Cám ơn các Seminar khoa học của Bộ môn XSTK (Khoa Toán, Trường Đại học Khoa Học Huế), Seminar của Khoa Toán ứng dụng Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, Bộ môn XSTK (Khoa Toán-Cơ-Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại Học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh), Khoa Toán (Trường đại học Khon Kaen, Thái Lan) và Dự án Nghiên cứu Toán ứng dụng 2008-2010 (Khoa Toán, Trường Đại học Khon Kaen, Thái Lan) đã tạo điều kiện cho chúng tôi trao đổi ý tưởng với các đồng nghiệp và báo cáo các kết quả nghiên cứu của đề tài trong những năm 2007, 2008 và 2009.

Tài liệu tham khảo

[1] P. L. Butzer, L. Hahn, U. Westphal, *On the rate approximation in the central limit theorem*, Journal of approximation theory, Vol. 13, N. 3, March, (1975), pp. 32-47.

[2] P. L. Butzer, H. Kirschfink and D. Schulz, *An extension of the Lindeberg-Trotter operator-theoretic approach to limit theorems for dependent random variables*, Acta Sci. Math., (1987), 51, 423-433.

[3] P. L. Butzer and H. Kirschfink, *General limit theorems with o-rates and Markov processes under pseudo-moment conditions*, Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen, (1988), Bd. 7(4), 280-307.

[4] Chaidee, N.; Neammanee, K. Berry-Esseen bound for independent random sum via Stein's method. Int. Math. Forum 3 (2008), no. 13-16, 721–738. MR2386188

[5] Louis H.Y. Chen and Qi-Man Shao, *A non-uniform Berry-Esseen bound via Stein's method*, Probab. Theory Related Fields, (120), (2001), pp. 236-254.

[6] Louis H.Y. Chen and A.D. Barbour, *An introduction to Stein's Method*, Singapore University Press and World Scientific, (2005).

[7] R. M. Dudley, *Distances of probability measures and random variables*, The Annals of Mathematical Statistics, (1968), Vol 39, N. 5, 1563-1572.

[8] R. M. Dudley, *Probabilities and Metrics: convergence of laws on metric spaces, with a view to statistical testing* (lect. Notes Series: N45), Aarhus Uni, Aarhus, (1976).

[9] W. Feller, *An Introduction to probability theory and its applications*, volume II, 2nd edition, John Wiley & Sons, New York, (1971).

[10] Formanov, Sh. K. On the Stein-Tikhomirov method and its applications to nonclassical limit theorems. (Russian) Diskret. Mat. 19 (2007), no. 1, 27–39; translation in Discrete Math. Appl. 17 (2007), no. 1, 23–36 MR2325901

[11] Alison L. Gibbs and Su Francis Edward, *On choosing and bounding probability metrics*, Manuscript version (2002), 1-21

[12] Peter W. Gylnn, *The Central Limit Theorem, Law of Large Numbers and Monte Carlo Methods*, Technical Report, 2007, pp. 1-39.

[13] B. Gnedenko *Limit theorems for sums of a random number of positive independent random variables*, Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. II: Probability theory, Univ. California Press, Berkeley, Calif., (1972), pp. 537-549.

[14] B. Gnedenko *On limit theorems for a random number of random variables*, Probability theory and mathematical statistics (Tbilisi, 1982), Lecture Notes in Math., Vol. 1021, Springer, Berlin, (1983), pp. 167-176.

[15] Trần Lộc Hùng, *Về các ứng dụng của phương pháp toán tử trong luật yếu các số lớn*, Tạp chí Toán học Việt nam, N 2, (1983), trang 20-24.

[16] Trần Lộc Hùng, *Phương pháp Trotter trong luật các số lớn với tổng ngẫu nhiên*, Tạp chí Toán học Việt nam, N. 2, (1988), trang 4-9.

[17] Tran Loc Hung, *On Trotter metric and its an application in weak law of large numbers*, Proc. International Conference on Theory Probability, Random Processes, Mathematical Statistics and Applications, 21-23 Feb. BSU, Minsk (Belarus), 519.2 (063), (2005), N. 22, T. 33, pp. 344-349.

[18] Tran Loc Hung, *On a probability metric based on Trotter operator*, Vietnam Journal of Mathematics, 35, (2007), N. 3, pp. 21-32, MR2317431

[19] Trần Lộc Hùng, *Đánh giá khoảng cách xác suất Trotter của hai tổng các véc tơ độc lập*, Tạp chí Khoa học, Đại học Huế, Phần Khoa học Tự nhiên, (2007), số 42, trang 103-111.

[20] Tran Loc Hung, *On the Trotter's distance of two weighted random sums of d-dimensional random variables*, Probability Theory, Random Processes, mathematical Statistics and Applications, Proceedings of the International Scientific Conference, Minsk, September 15-19, (2008), pp. 417-422.

[21] Trần Lộc Hùng và Trần Thiện Thành, *Tốc độ hội tụ trong một số định lý giới hạn đối với tổng ngẫu nhiên qua khoảng cách Trotter*, Tạp chí Khoa học Đại học Huế, Đại học Huế, Phần Khoa học Tự nhiên, N. 14 (48), (2008), trang 41-48.

[22] Trần Lộc Hùng và Đặng thị Tố Như, *Một đánh giá khoảng cách xác suất Trotter đối với hai tổng Abel các biến ngẫu nhiên độc lập*, Thông tin khoa hoc, Trường Đại học Khoa học Huế, số XV, Phần Khoa học Tự nhiên, (2008), trang 1-7.

[23] Tran Loc Hung, *On the rates of the Trotter's probability distance concerning two weighted random sums of d-dimensional random variables*, International Mathematical Forum, (2008) (submitted)

[24] Trần Lộc Hùng và Trần Thiện Thành, *Tổng ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên độc lập*, Tạp chí Khoa học Học Viện Kỹ thuật Quân sự, số 120, III, (2007), trang 12-22.

[25] Tran Loc Hung and Tran Thien Thanh, (2008), *Some results on random limit theorems of random identically independent random variables*, Communication of the Korean Mathematical Society 2008), (submitted).

[26] Tran Loc Hung, Tran Thien Thanh, and Bui Quang Vu, (2008), *Some results related to distribution functions of chi-square type random variables with random degrees of freedom*, Bull. Korean Math.Soc., 45, No. 3, pp. 509-522. MR2442192.

[27] Trần Lộc Hùng, Trần Thiện Thành và Bùi Quang Vũ, (2007), *Phân phối dạng khi bình phương với độ tự do ngẫu nhiên*, Tạp chí Ứng dụng Toán học Việt Nam, Tập 5, Số 1, trang. 13-26.

[28] John E. Hutchinson and Ruschendorf Ludger, *Random fractals and probability metrics*, Manuscript version 2002, 1-21.

[29] R. A. Khan, *Some probabilistic methods in the theory of approximation operator*, Acta mathematica Academial scientiarun. Hungarical Tomus 35 (1-2), (1980), p.193-203.

[30] H. Kirschfink, *The generalized Trotter operator and weak convergence of dependet random variables in different probability metrics*, Results in Math. (1989), Vol 15, 294-323)

[31] A. N. Kolmogorov and Fomin, Foundations of theory of real functions and functional analysis, Moscow, 1975.

[32] A. Krajka, Z. Rychlik, *Necessary and sufficient conditions for weak convergence of random sums of independent random variables*, Comment. Math. Univ. Carolinae 34,3 (1993), pp. 465-482.

[33] V. Kruglov, V. Korolev *Limit Theorems for Random Sums*, Moscow University Press, Moscow, (1990), (bản tiếng Nga).

[34] Lebedev E. A., *On new properties distributions of mathematical statistics, Probability Theory, Random Processes, Mathematical Statistics and Applications*, Proceedings of the Intertional Conference in honor of 70 years Jubilee of Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences Gennady Medvedev, Minsk February 21-25, 2005, pp. 154-160.

[35] E. Lukacs, *Characteristic Functions*, London, 1960.

[36] A. B. Molchanov, *Central limit theorem for large deviations*, (1975), Moscow, (bản tiếng Nga).

[37] M. V. Muchanov, *Limit theorem for Abel sums*, Izvestia Acad. Sci. Turcmenistan, (1987), N 5987, 19-23, (bản tiếng Nga).

[38] K. Neammanee and N. Chaidee, *Berry-Esseen bound for independent random sum via Stein's method*, International Mathematical Forum, (3), no. 15, (2008), pp. 721-738.

[39] V. V. Petrov, Summation of independent random variables, ,Moscow, (1970), (bản tiếng Nga).

[40] Prakasa B.L. S. Rao, *On the rate of approximation in the multidimensional central limit theorem*, Liet. Matem. Rink, (1977), 17, pp. 189-194.

[41] A. Renyi, *Probability Theory*, Budapest, (1970).

[42] H. Robbins, *The asymptotic distribution of the sum of a random number of random variables*, Bull. Amer. Math. Soc., 54 (1948), pp. 1151-1161.

[43] Z. Rychlik, D. Szynal, *On the limit behaviour of sums of a random number of independent random variables*, Colloq. Math., 28 (1973), pp. 147-159.

[44] Z. Rychlik and T. Walczynski, *Convergence in law of random sums with nonrandom centering*, J. Math. Sci. (New York) 106 (2001), pp. 2860-2864.

[45] V. Sakalauskas, *On an estimate in the multidimensional limit theorem*, Liet. matem. Rink, (1977), V. 17(4), pp. 195-201.

[46] V. Sakalauskas, *Lindeberg's CLT in multidimensional and Banach spaces*, Technical Report, 2006.

[47] D. D. Stancu, *Use of probabilistic methods in the theory of uniform approximation of continuous function,* Rev. Rown. Math. Pures and appl, Tome XIV, No. 5, p. 673-691, Bucarest, (1969).

[48] Yurii B. Shvetsov, John J. Borkowski, *Random sum estimators and their efficiency*, Technical Report, Department of Mathematical Sciences, Montana State University, 2004, pp.1-20.

[49] H. F. Trotter, *An elementary proof of the central limit theorem*, Arch. Math (Basel), (1959), 10, 226-234.

[50] N. N. Troush and Tran Loc Hung, On the asymptotic behavior of statistics depending on a random number, Mathematical Modelling and Statistical Analysis of Time Series, Belarus State University, (1993), pp. 101-110, (in Russian).

[51] V. M. Zolotarev, *Metric distances in spaces of random variables*, Math. Uspekhi, (1976), Vol 101 (143), N3 (11), 417-454, (bản tiếng Nga).

[52] V. M. Zolotarev, *Ideal metrics in the problems of probability theory and mathematical statistics*, Austral. J. Statist., (1979), 21, (3), 193-208.

[53] V. M. Zolotarev, *Probability metrics*, Theory Prob. Appl. (1983), 28, 278-302.

[54] V. M. Zolotarev, *Modern Theory of Summation of random Variables*, Utrecht, the Netherlands, (1997).

Phụ lục

1. Photo bản Đề cương đề tài nghiên cứu đã được phê duyệt
2. Phiếu tóm tắt kết quả nghiên cứu bằng tiếng Việt và tiếng Anh
3. Phiếu đăng ký kết quả nghiên cứu (biểu mẫu 13/NCCA/ĐKKQNC)

PROJECT SUMMARY

Project Title:**Limit theorems for random sums of random variables and applications**

Code Number:

Principal Researcher:Associate Professor, Dr. Tran Loc Hung

Implementing Instituttion: Hue University of Sciences

Cooperating Institutions:

1. **Objectives**:

   (a) Extending the classical results in Theory of Limit theorems (especially, Central Limit Theorem and Weak Laws of Large Numbers) for random sums of independent random variables (or, random vectors), (are extensions and generalizations of results from H. Robbins [42], B. Gnhedenko [13],[14], W. Feller [9] and A. Renyi [41]).

   (b) Using the probability metric based on Trotter's operator (H. F. Trotter, 1959, see [49]) for convergence rate estimations in some limit theorems for random sums of independent random variables (or, random vectors) and distance between two random sums of independent random variables (or, random vectors).

   (c) Establishing the applications of random sum approach in define of the probability distribution of chi square type χ^2 with random degree of freedom, confedence intervals for population parameters via random estimators.

2. **Contents:**

   (a) Establishing the asymptotic behaviors for random sum of independent random variables.

   (b) Estimating the convergence rates in Weak Laws of Large Numbers via Trotter's distance (see more details in [20]). The received results can be used in Approximation Theory.

   (c) Estimating the distance between two random sums of independent random vectors via Trotter's distance (see [18]-[23]). The received results are extensions and generalizations of Prakasa B. L. S. Rao [40] and V. Sakalauskas [45].

   (d) Establishing some applications to applied statistics and Monte carlo simulation via random sum approach .

3. **Results obtained**:

   (a) Scientific reports:

      i. Tran Loc Hung, *Estimations of Trotter's distance for two sums of independent random vectors*, **The Second Scientific Conference** of Hue University, 2007.
      ii. Tran Loc Hung and Tran Thien Thanh, *Some results related to centers of random variables*, **The Second Scientific Conference** of Hue University, 2007.
      iii. Tran Loc Hung, Tran Thien Thanh and Bui Quang Vu, *The distribution of chi square with random degree of freedom*, **The Second Scientific Conference** of Hue University, 2007.
      iv. Tran Loc Hung and Tran Thien Thanh, *The distribution of chi square with random degree of freedom*, **Fifth Workshop on Optimization and Applied Mathematics**, Bavi, 2007.
      v. Tran Loc Hung, Tran Thien Thanh and Bui Quang Vu, *On a parameter estimation problem via random summation*, **Sixth Workshop on Optimization and Applied Mathematics**, Bavi, 2008.
      vi. Tran Loc Hung, Tran Thien Thanh and Bui Quang Vu, *Some connections between random sum limit theorems and Monte Carrlo Simulation*, **Vietnam-Korea Workshop on Optimization and Applied Mathematics**, Nha Trang, 2008
      vii. Tran Loc Hung and Tran Thien Thanh, *Some Estimation Problems via Random-Sum Estimators*, **Vietnamese Mathematical Congress**, 2008.

   (b) **Publications in national journals**:

      i. Tran Loc Hung and Tran Thien Thanh, *Some results on random sum of independent and identically distributed random variables*, **Journa of Science and Technology**, University of Military Technique, N. 120, III, pp. 12-22.
      ii. Tran Loc Hung, *Estimations of Trotter's distance for two sums of independent random variables*, **Journal of Science**, Hue University, N. 42, (2007), pp. 103-109.
      iii. Tran Loc Hung, Tran Thien Thanh and Bui Quang Vu, *The distribution of the chi square type random variables with random degree of freedom*, **Vietnam Journal of Applied Mathematics**, Vol 5, N. 1, (2007), pp. 13-26.

iv. Tran Loc Hung and Tran Thien Thanh, *The convergence rates in some limit theorems for random sums via Trotter's distance*, **Journal of Science** Hue University, N. 14 (48), (2008), pp. 41-48.

(c) **Publications in Proceedings**:

i. Tran Loc Hung, Tran Thien Thanh and Bui Quang Vu, *Some connections between Random-sum Limit Theorems and Monte Carlo Simulation*, Proceedings of the Sixth Vietnam-Korea Joint Workshop Mathematical Optimization Theory and Applications, February 25-29, 2008, **Publishing House for Science and Technology**, pp. 53-63.

ii. Tran Loc Hung, *On the Trotter's distance of two weighted random sums of d-dimensional random variables*, Probability Theory, Random Processes, Mathematical Statistics and Applications, **Proceedings of the International Scientific Conference**, Minsk, September 15-19, (2008), pp. 417-422.

(d) **Publications in international journals:**

i. Tran Loc Hung, Tran Thien Thanh and Bui Quang Vu,(2008) "Some results related distribution functions of chi-square type random variables with random degrees of freedom", **Bulletin of Korean Mathematical Society**, 45, No. 3, pp. 509-522, MR2442192.

ii. Tran Loc Hung, (2009), Estimations of the Trotter's distance of two weighted random sums of d-dimensional in dependent random variables, **International Mathematical Forum**, 4, no. 22, pp. 1079 - 1089.

(e) **Accepted results**:

i. Tran Loc Hung and Tran Thien Thanh, (2009), "Some results related random sums of random variables", đã được nhận đăng trên **Communications of the Korean Mathematical Society**.

4. Budget used:50.000.000 VND (In words: fifty millions VND)

Implementing Institution | **Principlal Researcher**

Professor, Dr. Nguyen Van Tan | Professor, Dr. Tran Loc Hung

Cơ quan chủ trì đề tài	**Chủ nhiệm đề tài**
PGS. TS. Nguyễn Văn Tận	PGS. TS. Trần Lộc Hùng